カタラン予想について

M3-3-39 矢野 厚

1 はじめに

この文章では断らない限り，文字は自然数を表すことにします．また m, n, p, q, k は 2 以上の整数とします．

カタラン予想とは

$$m^p - n^q = 1 \tag{1}$$

の解は $m = 3, p = 2, n = 2, q = 3$ のみである．というものですがこれは実質上解決しています．

命題 1.1 カタラン予想をみたす m, n, p, q はいずれも C= 1. 06 $\times 10^{26}$ より小さい

すなはち，この問題は有限回の操作で解決 (否定的かもしれないけど) されてしまうのです．そこでよく似た予想として次のものがあります．

命題 1.2 (ピライの予想) $k \geqq 2$, $p \geqq 2$, $q \geqq 2$ とすると，$m^p - n^q = k$ を満たす (m, n, p, q) は有限個しかない．

早速本題に入りましょう．

2 本題

命題 2.1 $m - n = a(a \in \mathbb{Z})$ とするこのとき a は奇数

証明 a が偶数と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}(n+a)^p - n^q &\equiv n^p - n^q \pmod 2 (\because a \text{ は偶数}) \\ &\equiv 1 \end{aligned} \tag{2}$$

n が奇数のとき $n^p - n^q \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 2$
n が偶数のとき $n^p - n^q \equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod 2$

これは $n^p - n^q \equiv 1 \pmod 2$ に矛盾．よって a は奇数

(証明終)

a, m, n, p, q の特別な場合を見ていくことにしよう

3　$a = \pm 1$ のとき

$a = -1$ のときはカンタン

命題 3.1 $a = 1$ のとき $(n+a)^p - n^q = 1$ の解は $n = 2,\ p = 2,\ q = 3$ のみである．

証明

$$
\begin{aligned}
(n+1)^p - n^q &\equiv -(-1)^q \pmod{n+1} \\
&\equiv 1 \pmod{n+1}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$n + 1 \geqq 3$ だから q は奇数

よって，

$$(n+1)^{p-1} = (n^{q-1} - n^{q-2} + \cdots - n + 1)$$

n が奇数とすると，

$$(n+1)^{p-1} \equiv 0 \pmod 2,\ (n^{q-1} - n^{q-2} + \cdots - n + 1) \equiv \underbrace{1 - 1 + \cdots - 1 + 1}_{\text{q 個}} \equiv 1 \pmod 2$$

すなはち，$(n+1)^{p-1} \not\equiv (n^{q-1} - n^{q-2} + \cdots - n + 1) \pmod 2$ となり矛盾．よって n は偶数

また $(n+1)^{p-1} + (n+1)^{p-2} + \cdots + (n+1) + 1 = n^{q-1}$ だから

$$(n+1)^{p-1} + (n+1)^{p-2} + \cdots + (n+1) + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{p\text{ 個}} \equiv p \equiv 0 \pmod 2$$

よって p は偶数

そこで $n = 2t$，$p = 2r(k,\ r \in \mathbb{N})$ とかくと，(**??**) より，

$$\{(2t+1)^r - 1\}\{(2t+1)^r + 1\} = 2^q t^q \tag{4}$$

となる．左辺の $\{(2t+1)^e - 1\}, \{(2t+1)^r + 1\}$ は連続する偶数なので $((2t+1)^e - 1$, $(2t+1)^r + 1) = 2$ であり，また $2t | 2(t+1)^r - 1$ である．よって (4) より，

$$
\begin{cases}
(2t+1)^r - 1 = 2t^q \\
(2t+1)^r + 1 = 2^{q-1}
\end{cases}
\tag{5}
$$

を得る．(5) より $2^{q-1} > 2t^q$ となるから $t = 1$，すなはち $n = 2$ が分かり，(5) よりこのとき $3^r - 1 = 2$ なので $r = 1$，すなはち $p = 2$ したがって $3^2 - 2^q = 1$ よって $q = 3$

(**証明終**)

以上の証明は中国のュによります．”エレガント”でいい感じです．次はカンタンです

命題 3.2 $a=-1$ のとき (1) の解は存在しない

証明　法を $n-1$ として考えると

$$\begin{aligned}(n-1)^p-n^q &\equiv -1^q \pmod{n-1}\\ &\equiv -1 \\ &\equiv 1\end{aligned} \tag{6}$$

よって $n-1$ は 2 の約数．$m=n-1 \geqq 2$ だから $n-1=2$，$n=3$ よって，

$$2^p-3^q = 1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}2^p-3^q &\equiv (-1)^p \pmod 3\\ &\equiv 1 \pmod 3\end{aligned} \tag{8}$$

よって p は偶数 $p=2t$ とすると

$$(2^t-1)(2^t+1)=3^q \tag{9}$$

$q \geqq 2$ だから $(2^t-1)(2^t+1)$ は 3 の倍数また，(2^t-1)，(2^t+1) のうち，3 の倍数であるものは高々1 個であるから

$$2^t-1=1,\, 2^t+1=3^q \tag{10}$$

よって $t=1$ したがって $p=2$，また (10) より $2+1=3^q$ よって $q=1$ となるがこれは $q \geqq 2$ に矛盾よってこのような m, n, p, q の組は存在しない

(**証明終**)

これらによって次のことが得られた

定理 3.1 $m^p-n^q=1$ のとき $p \neq p' \in \mathbb{N}$，$q \neq q' \in \mathbb{N}$ に対し $m^{p'}-n^{q'}=1$ となるのは $m=3, n=2, p=2, q=3, p'=q'=1$ のみである

証明　$p>p'$ としても一般性を失わない．このとき $q>q'$ となるから $m^{p-p'}-1$, $n^{q-q'}-1>0$ よって

$$m^p-n^q=m^{p'}-n^{q'} \tag{11}$$

$$m^{p'}(m^{p-p'}-1)=n^{q'}(n^{q-q'}-1) \tag{12}$$

$(m^{p'}, n^q)=1$ だから $m^{p-p'}-1=kn^{q'}$，$n^{q-q'}-1=km^{p'}(k \in \mathbb{Z})$ とかける

よって $m^{p'}-1|m^{p-p'}-1$ となるので $p'|p-p'$ すなはち $p'|p$ 同様に $q'|q$ が得られる．よって

$$(n^{q'}+1)^{\frac{p}{p'}}-(n^{q'})^{\frac{q}{q'}}=1 \tag{13}$$

となるが $p<p'$，$q<q'$ より $\dfrac{p}{p'}, \dfrac{q}{q'} \geqq 2$ よって命題 (3.1) より $m=3, n=2, p=2$, $q=3, p'=q'=1$ が得られた

(**証明終**)

4　m，n が素数のとき

定理 4.1 m が素数のとき (1) の解は $m=3,\ n=2p=2q=3$ のみである．

命題 4.1 $m=2$ のとき (1) の解は存在しない

補題 4.2 m,n,p,q が (1) の解のとき，　*(p,　q)=1*

証明　$(p,q)=r \geqq 3$ のとき

$$(m^{\frac{p}{r}})^r = (n^{\frac{q}{r}})^r + 1^r \tag{14}$$

となりフェルマーの大定理に矛盾 $(m^{\frac{p}{r}}, n^{\frac{q}{r}} \in \mathbb{Z})$
　$r=2$ のとき

$$(m^{\frac{p}{2}} - n^{\frac{q}{2}})(m^{\frac{p}{2}} + n^{\frac{q}{2}}) = 1 \tag{15}$$

$m^{\frac{p}{2}}, n^{\frac{q}{2}} > 1$ だから $m^{\frac{p}{2}} + n^{\frac{q}{2}} > 2$ これは $m^{\frac{p}{2}} + n^{\frac{q}{2}}$ が 1 の約数であることに矛盾
　よって $r=(p.\,q)=1$

証明終

大げさな定理使いましたがたいした事かいてません．次に

補題 4.3 $n^q \equiv 3 \pmod 4$ ならば $n \equiv 3 \pmod 4$，q は奇数

証明　簡単なので省略します

補題 4.4 q は奇数，$n \geqq 2$，$q \geqq 3$ のとき $n^{q-1} - n^{q-2} + \cdots - n + 1 \geqq 2$

証明　これも簡単なので省略

　命題 4.1 **の証明**　m は偶数で $p \geqq 2$ だから $m^p - n^q \equiv 0 - n^q \equiv 1 \pmod 4$ すなはち $n^q \equiv 3 \pmod 4$ 補題 4.3 より q は奇数よって

$$m^p = n^q + 1 = (n+1)(n^{q-1} - n^{q-2} + \cdots - n + 1) \tag{16}$$

$n+1$ は m^p の因数だから 2 の冪乗．よって $n = 2^t - 1 (t \in \mathbb{N})$ とかける

$$\begin{aligned} n^{q-1} - n^{q-2} + \cdots - n + 1 &\equiv (-1)^{q-1} - (-1)^{q-2} + \cdots - (-1) + 1 \pmod{n+1} \\ &\equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{q\text{ 個}} \\ &\equiv q \pmod{n+1} \end{aligned} \tag{17}$$

$n^{q-1}-n^{q-2}+\cdots-n+1$ は m^p の因数で補題 4.4 より 1 より大だから偶数である．しかし (17) より，

$$\begin{aligned} n^{q-1}-n^{q-2}+\cdots-n+1 &\equiv 0 \pmod 2 \\ &\equiv q \pmod 2 (\because n+1 \text{ は偶数}) \end{aligned} \tag{18}$$

となるが q は奇数であるので矛盾よって $m=2$ のとき (1) の解は存在しない

(**証明終**)

命題 4.5 q が奇数で m が奇素数のとき (1) の解は $m=3, n=2, p=2, q=3$ のみである

証明　q は奇数だから

$$\begin{aligned} m^p &= n^q+1 \\ &= (n+1)(n^{q-1}-n^{q-2}+\cdots-n+1) \end{aligned} \tag{19}$$

よって $n+1$ を $n^q+1=m^p$ は因数に持つから $n=m^t-1(t\in\mathbb{N},\, t>2,\, t=1$ のときは $n=m-1=1$ なので命題 (3.2) ですでに調べた) とかける．よって

$$m^p-(m^t-1)^q=1 \tag{20}$$

また $m^t-1|m^p-1$ だから $t|p$ よって定理 3.1 より，解は $m=3, n=2, p=2, q=3$ のみである

(**証明終**)

$q=2$ のときは解けませんでした

誰か知っている方がおられたら教えてください

定理 4.2 n が素数のとき (1) の解は $m=3, n=2, p=2, q=3$ のみである．

命題 4.6 n が素数，$m\geqq 3$ のとき (1) の解は $m=3, n=2, p=2, q=3$ のみである．

証明　$n^q=m^p-1=(m-1)(m^{p-1}+m^{p-2}+\cdots+m+1)$ すなはち $m-1>1$ は n^q の約数であるから $m=n^t+1(t\in\mathbb{N})$ とかけるよって

$$(n^t+1)^p-n^q=1 \tag{21}$$

となるので $n^t+1|n^q+1$ よって $t|q$ が必要条件であるので定理 3.1 より $m=3,\, n=2$, $p=2,\, q=3$(このとき条件を満たしていることは容易にわかる)

(**証明終**)

ずいぶんカンタンですね．$m=2$ のときはもうすでに命題 4.1 で調べましたから定理 4.2 は示されました

5　虫垂

とりあえず参考文献を書いておきます

日本評論社　エレガントな解答をもとむ selctions . . . この本に載ってたのを見てカタラン予想をやろうと思い立ってしまった $a = 1$ のときの証明はこの本の丸写し

共立出版　初等整数論講義　高木貞治著

ついでに TEX の本も (エレガントな解答をもとむよりかは読んだし) 紹介しておきます

技術評論社　LATEX 美文書作成入門　奥村晴彦著 . . . 有名な「奥村本」図書館にあったはず

SOFT BANK　pLATEX 2ε for Windoows Another Manual　乙部厳己，江口庄英著 . . . 分厚い．2 分冊になっている．かなり説明はたくさん載っていると思うが高いな

いかがでしたか．こういうものを考えるのは無謀だったかもしれません (中途半端になってしまった) カタラン予想に関する文献が少なくしかも英語でアメリカのページとかあさったのですがあまり書いてませんでした (私が読めなかっただけかもしれないけど) あとこの記事を書いていたとき錯乱している可能性がたぶんにありますので間違いがあったら私に突っ込んでください (証明飛ばしてるけどかけというのは勘弁してね)

文化祭期間中では質問，突っ込みがあれば分かる範囲でお答えします．文化祭後は M3-3 の私のところか`yanoatsushi@fm2.seikyou.ne.jp` にメールをください

読みにくい文章でしょうが，読んでいただいた方，ありがとうございました