角度の詰め込み

高校１年２組２０番　伊藤佑樹

1　はじめに

どうも、こんにちは。本日は、数学研究部にお越しくださいまして、ありがとうございます。さて、この記事では、何をしようとしているかというと、角度の詰め込みをしようとしているのです。とは言いましたが、「角度の詰め込み」とか言うものは、全く一般的でもなくて、私が勝手に作った言葉（もしかしたら、他の意味があるかもしれません）なので、まずその説明をします。

α 度の詰め込みをするというのは、ある n 角形があって、その n 角形に内角が α 度である角を、できるだけ多くすることです。この部誌では、この詰め込みをどれだけ行えるかについて考えて行きます。

なぜ、この問題をしてみようかと思ったかといいますと、最近、とある所で、この問題の α が 90 度のときについて考える機会があったからです。興味があれば、ここから先も読んでいただければ、幸いです。

2　準備

まず、角度に関する基本的な事実を挙げておきます。

定理　任意の n 角形の内角の和は、$180(n-2)$ 度である。

系　多角形において、その外角の和は、360 度である。

ここで、ある α 度の大きさの角の外角の大きさは、$180-\alpha$ 度です。

定義 $f(n,\alpha)$ は n 角形における内角が α 度である角の個数の最大値である。

3　凸な多角形においての詰め込み

まず、はじめに凸な多角形において、考えて行きます。この場合は、簡単で、次が成り立ちます。もちろん、ここでは、180 度未満の角度を詰め込むことを考えます。

定理 凸 n 角形において、内角が α 度である角について、

1. $\dfrac{360}{180-\alpha}$ が整数のとき
   (a) $n = \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、$f(n,\alpha) = n$
   (b) $n > \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、$f(n,\alpha) = \dfrac{360}{180-\alpha} - 1$
   (c) $n < \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、
      i. $\dfrac{180n-360}{\alpha}$ が整数ならば、$f(n,\alpha) = \dfrac{180n-360}{\alpha} - 1$
      ii. $\dfrac{180n-360}{\alpha}$ が整数でないならば、$f(n,\alpha) = [\dfrac{180n-360}{\alpha}]$
2. $\dfrac{360}{180-\alpha}$ が整数でないとき
   (a) $n > \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、$f(n,\alpha) = [\dfrac{360}{180-\alpha}]$
   (b) $n < \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、
      i. $\dfrac{180n-360}{\alpha}$ が整数ならば、$f(n,\alpha) = \dfrac{180n-360}{\alpha} - 1$
      ii. $\dfrac{180n-360}{\alpha}$ が整数でないならば、$f(n,\alpha) = [\dfrac{180n-360}{\alpha}]$

が成り立っている。

証明

この証明では、これらが構成可能であることと、これらが最大であること、の 2 段階で示す。

まず、全て構成可能であることを示す。これは簡単で、角度を順に、

$\overbrace{\alpha,\cdots,\alpha}^{f(n,\alpha)},\overbrace{\dfrac{180n-360-\alpha f(n,\alpha)}{n-f(n,\alpha)},\cdots,\dfrac{180n-360-\alpha f(n,\alpha)}{n-f(n,\alpha)}}^{n-f(n,\alpha)}$ とすることで、構成できる。

次に、最大であることを言う。

1. $n = \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、これは、明らか。
2. $n > \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、外角の和が 360 度であることを使えば、明らか。
3. $n < \dfrac{360}{180-\alpha}$ のとき、内角の和が $180n-360$ 度であることを使えば、明らか。

証明終

このように、凸 n 角形に関しては、簡単に $f(n,\alpha)$ を求めることができた。しかし、これは、凸であることが大きく影響していて、一般の多角形に対しては、これをそのまま使うことはできない。なぜなら、辺がどんどん内側へ巻き込まれていくようなものになり、辺が交わってしまうことが発生しうるからである。

4 一般の n 角形においての詰め込み

さて、ここからは、凸な図形に限らず、一般の n 角形においては、$f(n,\alpha)$ はどうなっているかを考える。これは、当然凸な場合よりは、値が大きくなるはずで、また、構成方法もそれほど単純ではない。次のような方針を採用する。

方針 2 種類のブロックをつなぎ合わせていくことで、できるだけ $f(n,\alpha)$ の値を大きくする。このとき、これらのブロックが重ならないような、ブロックの置き方を考える。

ここから先は、n は十分大きなものと仮定する。二つのブロックの辺の数を、それぞれ a,b とすると、もし、n が $k(a-1)+l(b-1)(k,l$ は自然数) の形で表せないならば、この方針は破綻してしまうからである。

4.1 実験

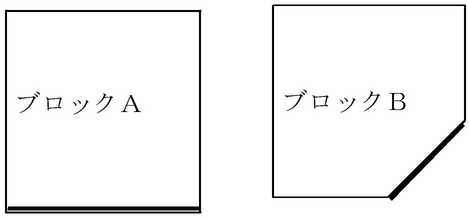
4.1.1 90 度

まず、内角の和を利用して、上からの評価をしてみる。

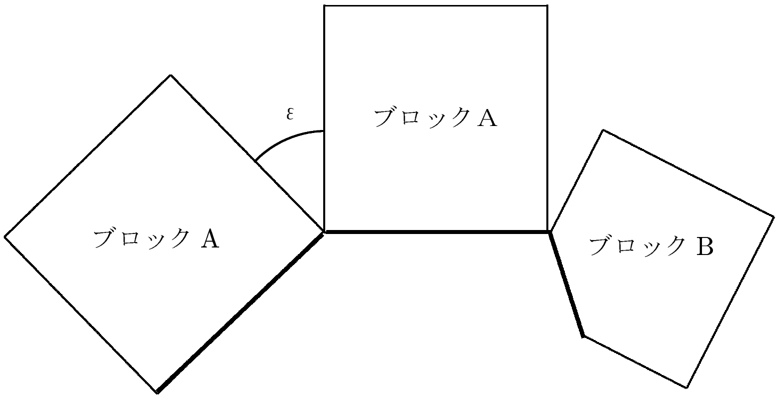
$$90f(n,90)+360(n-f(n,90))>180n-360$$

$$\frac{2}{3}n+\frac{4}{3}>f(n,90)$$

ここで、2 種類のブロック A,B を用意する。ブロック A は長方形、ブロック B は、直角が 3 個、135 度の角が 2 個からなる 5 角形とする。次の図の太線の部分をつなぎ合わせることを考える。



1. $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき
   $n = 3n' + 12$,(n' は自然数) とおく。このとき、ブロック A を n' 個、ブロック B を 3 個使う。A は連続して、n' 個使われるとする。また、全てのブロック同士の間の角度を $\epsilon(> 0)$ とおく。



このとき、次が成り立つ。

$$(180 - \epsilon)(n' - 1) + 2(90 - \epsilon) + 2(135 - \epsilon) = 180(n' + 3 - 2)$$

$$90 = (n' + 3)\epsilon$$

つまり、

$$\epsilon = \frac{90}{n' + 3}$$

なる ϵ をとれば、構成可能である。また、このとき、直角の数は、$2n'+9 = \frac{2}{3}n + 1$ となり、これはとりうる最大値となる。

このとき、$f(n, 90) = \frac{2}{3}n + 1$ である。

2. $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき
$n = 3n' + 8$,(n' は自然数) とおく。このとき、ブロック A を n' 個、ブロック B を 2 個使う。A は連続して、n' 個使われるとする。また、全てのブロック同士の間の角度を ϵ とおく。
このとき、次が成り立つ。

$$(180-\epsilon)(n'-1) + (90-\epsilon) + 2(135-\epsilon) = 180(n'+2-2)$$

$$180 = (n'+2)\epsilon$$

つまり、

$$\epsilon = \frac{180}{n'+2}$$

なる ϵ をとれば、構成可能である。また、このとき、直角の数は、$2n'+6 = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$ となり、これはとりうる最大値となる。

このとき、$f(n,90) = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$ である。

3. $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき
$n = 3n' + 4$,(n' は自然数) とおく。このとき、ブロック A を n' 個、ブロック B を 1 個使う。A は連続して、n' 個使われるとする。また、全てのブロック同士の間の角度を ϵ とおく。
このとき、次が成り立つ。

$$(180-\epsilon)(n'-1) + 2(135-\epsilon) = 180(n'+1-2)$$

$$270 = (n'+1)\epsilon$$

つまり、

$$\epsilon = \frac{270}{n'+1}$$

なる ϵ をとれば、構成可能である。また、このとき、直角の数は、$2n'+3 = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$ となり、これはとりうる最大値となる。

このとき、$f(n,90)=\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3}$ である。

ちなみに、90 度の場合は、n が 6 以上の場合に対して、これらが成り立っている。つまり、次の定理が成り立つ。

定理 $n\geq 6$ に対し、次が成り立つ。

$$f(n,90)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}n+1 & n\equiv 0 \pmod 3 \text{ のとき}\\ \dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3} & n\equiv 1 \pmod 3 \text{ のとき}\\ \dfrac{2}{3}n+\dfrac{2}{3} & n\equiv 2 \pmod 3 \text{ のとき}\end{cases}$$

これらは、上からの評価によって、得られる最大値になっていることに注意しておこう。

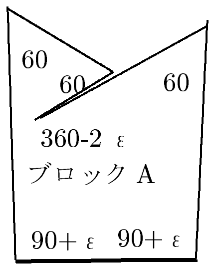
4.1.2 60 度

先程と同様に、上からの評価をする。

$$60f(n,60)+360(n-f(n,60))>180n-360$$

$$\frac{3}{5}n+\frac{6}{5}>f(n,60)$$

ここで、2 種類のブロック A,B を用意する。ブロック A は 60 度の角が 3 個、$90+\epsilon$ 度の角が 2 個、$360-2\epsilon$ 度の角が一個の六角形、ブロック B は、60 度の角が 2 個、120 度の角が 2 個からなる四角形とする。下図の太線の部分をつなぎ合わせることを考える。



1. $n\equiv 0 \pmod 5$ のとき
   $n=5n'+15$,(n' は自然数) とおく。このとき、ブロック A を n' 個、ブ

ロック B を 5 個使う。A は連続して、n' 個使われるとする。また、全てのブロック同士の間の角度を ϵ とおく。
このとき、次が成り立つ。

$$(180-3\epsilon)(n'-1)+4(120-\epsilon)+2(150-2\epsilon)=180(n'+5-2)$$

$$60=(3n'+5)\epsilon$$

つまり、

$$\epsilon=\frac{60}{3n'+5}$$

なる ϵ をとり、接触しないように、ブロックの大きさを調節すれば、構成可能である。また、このとき、60 度の角の数は、$3n'+10=\dfrac{3}{5}n+1$ となり、これはとりうる最大値となる。

2. $n \equiv 1 \pmod 5$ のとき、
$n=5n'+6$,(n' は自然数) とおく。このとき、ブロック A を n' 個、ブロック B を 2 個使う。A は連続して、n' 個使われるとする。また、全てのブロック同士の間の角度を ϵ とおく。
このとき、次が成り立つ。

$$(180-3\epsilon)(n'-1)+(120-\epsilon)+2(150-2\epsilon)=180(n'+2-2)$$

$$240=(3n'+2)\epsilon$$

つまり、

$$\epsilon=\frac{240}{3n'+2}$$

なる ϵ をとり、接触しないように、ブロックの大きさを調節すれば、構成可能である。また、このとき、60 度の角の数は、$3n'+4=\dfrac{3}{5}n+\dfrac{2}{5}$ 個となり、これはとりうる最大値となる。
以下、同様にして、次の定理が導かれる。

定理 十分大きな n に対し、次が成り立つ。

$$f(n,60)=\begin{cases}\frac{3}{5}n+1 & n\equiv 0 \pmod 5 \text{ のとき}\\ \frac{3}{5}n+\frac{2}{5} & n\equiv 1 \pmod 5 \text{ のとき}\\ \frac{3}{5}n+\frac{4}{5} & n\equiv 2 \pmod 5 \text{ のとき}\\ \frac{3}{5}n+\frac{1}{5} & n\equiv 3 \pmod 5 \text{ のとき}\\ \frac{3}{5}n+\frac{3}{5} & n\equiv 4 \pmod 5 \text{ のとき}\end{cases}$$

この場合でも、上からの評価によって得られた最大値であることに注意しよう。

4.2 予想

実験から、次のようなことが予想される。

予想 180 度以下の任意の大きさの角度 α に対して、十分大きな n に対する、$f(n,\alpha)$ の値は、内角の和による上からの評価により導かれる最大値である。つまり、

$$\frac{180n+360}{360-\alpha}>f(n,\alpha)\geq\frac{180n+360}{360-\alpha}-1$$

が成り立つ。

ここから先は、この予想を証明していこうと思う。

4.3 α が有理数の場合

$\alpha=\frac{q}{p}$(p,q は互いに素、$180p>q$) とおく。

まず、上からの評価をしてみると、

$$\frac{180pn+360p}{360p-q}>f(n,\alpha)$$

となる。ここで、$360p-q$ と $180p$ の最大公約数を r とする。これは、180 と q の最大公約数でもある。まずは、$\frac{360p-q}{r}+1$ 角形で、$\frac{q}{p}$ 度の角が $\frac{180p}{r}$ 個、$360-2\epsilon$ 度の角が $\frac{180p-q}{r}-1$ 個、$90+\left(\frac{180p-q}{r}-1\right)\epsilon$ 度の角が 2 個のものを考える。ちなみに、これを構成することは可能である。次のように、すればよい。まず、$90+\left(\frac{180p-q}{r}-1\right)\epsilon$ 度の角にはさまれた辺をつなぎ合わせる辺（今までの太線部分）とする。

残りの角を順につなぐことを考えよう。まず、$\frac{q}{p}$ 度、$360-2\epsilon$ 度の角をはじめからの外角の和（$90+\left(\frac{180p-q}{r}-1\right)\epsilon$ 度の角は考慮に入れない）が

180 度が -180 度からの間だけを動くように、できるだけ角度を並べていく。そして、残った角度で、外角の和を $180+2\left(\frac{180p-q}{r}-1\right)\epsilon$ にする。このようにすることは可能である。これに $90+\left(\frac{180p-q}{r}-1\right)\epsilon$ 度の角を二つつなげることで、多角形を構成できる。
以上のように、$\frac{360p-q}{r}+1$ 角形で、$\frac{q}{p}$ 度の角が $\frac{180p}{r}$ 個、$360-2\epsilon$ 度の角が $\frac{180p-q}{r}-1$ 個、$90+\left(\frac{180p-q}{r}-1\right)\epsilon$ 度の角が 2 個のものは構成可能。

さて、ここで、もう一種類のブロックを x 個の $\frac{q}{p}$ 度の角を含む m 角形とする。また、つなぎ合わせる辺（今までの太線部分）の両端の角の角度をどちらも等しいものとして、t 度とおく。この t はどのような値をとるのかを考えていこう。

ブロック同士の間の角の大きさを ϵ とし、$\frac{360p-q}{r}+1$ 角形のブロックを n' 個、m 角形のブロックを b 個使うものとすると、

$$\left(180-\left(\frac{360p-2q}{r}-1\right)\epsilon\right)(n'-1)+(360-2t-\epsilon)(b-1)$$

$$+2\left(270-t-\left(\frac{180p-q}{r}\right)\epsilon\right)=180(n'+b-2)$$

これより、

$$t=90+\frac{180}{b}-\epsilon'$$

ちなみに、$\epsilon'=\left(\frac{\left(\frac{360p-2q}{r}-1\right)n'+b}{2b}\right)\epsilon$ となっている。

ここで、予想より少し緩いことを示す。
定理 0 より大きく、180 より小さい有理数 $\alpha=\frac{q}{p}$ において、十分大きな n に対して、

$$\frac{180pn+360p}{360p-q}>f(n,\alpha)\geq\frac{180pn+r}{360p-q}$$

ちなみに、r は、180 と q の最大公約数である。
これは、$r=q$ のとき、つまり、q が 180 の約数のとき、これは先ほどの予想

そのものである。

証明
次の式を満たす自然数 m, x をとってくる。

$$\frac{360p-q}{r}x - \frac{180p}{r}(m-1) = 1 \qquad (*)$$

まず、このような m, x をとることができる。なぜなら、r の条件より $\frac{360p-q}{r}$ と $\frac{180p}{r}$ は互いに素であることから、この左辺の式は m, x の値を変えることで、任意の整数値を取ることができる。左辺の式の値が 1 となるような、整数の組 m, x を見つければ、これを自然数の組に変えるためには、x に $k\frac{180p}{r}$、m に $k\frac{360p-q}{r}$ を足せばよい。
また、このとき、$m-1$ は、$\frac{360p-q}{r}$ と互いに素になっている。よって、b を 1 から $\frac{360p-q}{r}$ まで動かすことで、十分大きな全ての n について示すことができる。よって、$t = 90 + \frac{180r}{360p-q} - \epsilon''$ とできる。

下式を満たすような m, x をとる。これは、角度が x 個の $\frac{q}{p}$ 度、そして 2 個の t 度以外の角が存在するための条件である。

$$0 < 180(m-2) - \frac{q}{p}x - 2(90 + \frac{180r}{360p-q} - \epsilon'') < 360(m-x-2)$$

$(*)$ より、次が成り立っていることに注意しておこう。

$$\frac{360p-q}{p}x + 180 - \frac{r}{p} = 180m$$

まず、左側の不等号から示す。
式を整理すると、下のようになる。

$$\frac{r}{p} + 360 + \frac{360r}{360p-q} - 2\epsilon'' < \left(\frac{360p-2q}{p}\right)x$$

となり、これを満たす大きさの x をとることで満たすことができる。
次に、右側の不等号を示す。
式を整理すると、下のようになる。

$$\frac{360pr-qr}{p(360p-q)} + 2\epsilon'' < \frac{360pr}{p(360p-q)}$$

これは、十分小さな ϵ'' をとることで満たすことができる。

あとは、図形を実際に構成すればよいが、これは、$\frac{q}{p}$ 度の角を x 個持った m 角形と同様にすれば、構成できる。
さて、このとき、$n = \frac{360p-q}{r}n'+b(m-1)$ であり、$\frac{q}{p}$ 度の角は、$\frac{180p}{r}n'+bx$ 個ある。

$$\begin{aligned}\frac{180p}{r}n'+bx &= \frac{180p}{360p-q}n+b(-\frac{m-1}{360p-q}+x)\\ &= \frac{180p}{360p-q}n+\frac{br}{360p-q}\end{aligned}$$

以上により、定理が示された。
証明終

5　あとがき

さて、ここまで話をしてきたが、結局かなり緩い評価しか示せず、予想を証明することができなかったのは残念です。（もちろん、予想が本当に成り立っているかは分かりませんが）もしくは、むしろ上の予想は成り立たず、次が成り立っているのかもしれません。

$$\frac{180pn}{360p-q}+1 \geq f(n,\alpha) \geq \frac{180pn+r}{360p-q}$$

また、180 度よりも大きな角に対して、どんなことが成り立つようになるのかという事も調べていきたいものです。そのほかには、これを立体の場合に拡張してみることもできるかもしれません。例えば、立方体の角をどれくらいの割合である立体に詰め込めるか、などという問題も考えられます。興味があれば、考えてみてください。
見た感じは結構単純な問題でしたが、結構考えてみて、楽しかったです。意外な問題が面白かったりするもんだなぁとか感じました。
えっと、相談に乗ってくださった西本氏、矢野氏、編集の河口君に感謝です。
そして、最後になりましたが、ここまで読んでいただき、ありがとうございました。

伊藤佑樹