立体魔法陣

1　魔法陣とは

魔法陣という物が良く知られており, その定義は次のようになっている.

定義 1.1 正方形を $n \times n$ の小正方形に分け, 各小正方形に 1 から n^2 までの整数を一つずつ書き込んで, どの行, どの列, どの対角線の n 個の数の和も一定になるようにしたものを n **次魔法陣**という.

例えば次のような物である. 魔法陣に関して次の定理が知られている.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

表 1: 3 次魔法陣

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

表 2: 4 次魔法陣

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

表 3: 5 次魔法陣

定理 1.2 $n \neq 2$ であれば,n 次魔法陣は存在する.

これの拡張として,n 次立体魔法陣という物を考えてみた. 次のように立体魔法陣を定義する.

定義 1.3 立方体を $n \times n \times n$ の小立方体に分け, 各小立方体に 1 から n^3 までの整数を一つずつ書き込んで, どの縦, 横, 上下に並ぶ n 個の数の和も一定になるようにした物を,n **次立体魔法陣**という[1].

さて, どのような n に対して n 次立体魔法陣が存在するかどうか調べてみる事にする. 実は, 次の定理が成り立つのだ.

定理 1.4 $n \neq 2$ であれば n 次立体魔法陣が存在する

[1]対角線などは考慮しない事にする

2　n が奇数の時

2.1　ラテン方陣とは

表 1 の魔法陣に注目してみよう．これに全てのマスから 1 引いて,3 進法表示してみる．

10	22	01
02	11	20
21	00	12

3 の位と 1 の位を分けて見ると, 次の 2 つの方陣が得られる．

1	2	0
0	1	2
2	0	1

0	2	1
2	1	0
1	0	2

この 2 つの方陣において, **どの行, 列にも 0,1,2 が一回ずつ現れる**という性質がある．このような性質を備えた方陣は, **ラテン方陣**と呼ばれるそうだ．さらに,2 つの方陣を合わせると,$00, 01, \cdots, 22$ が全て重複なく現れる．この性質を**直交する**という．逆に直交する二つのラテン方陣が得られれば, そこから魔法陣を再現する事が出来る．

2.2　ラテン方陣を作る方法

まず, いくつか記号を導入しておこう．

定義 2.1 整数 a, b, n に対して,$a \equiv b \pmod n$ とは,$a - b$ が n で割り切れるという事を意味する．

定義 2.2 $a \equiv b \pmod n$ となるような非負整数 b のうち最小のものを,$\overline{a}$ で表す事にする．

表 2.1 のラテン方陣は,x 行 y 列に $\overline{x - y + 1}$ を書き込む事によって, 表 2.1 のラテン方陣は,x 行 y 列に $\overline{-x - y + 2}$ を書き込む事によって得られる．このように一次式 $ax + by + c$ を上手く選べばその式から n 次ラテン方陣を作る事が出来る． どのような式を選べばいいのだろう． 同じ行または列に $0, 1, \cdots, n-1$ が現れるためには, $\overline{a}, \overline{2a}, \cdots, \overline{na}$ が異なり, $\overline{b}, \overline{2b}, \cdots, \overline{nb}$ が異なる事が必要十分である．これは n と a, b が互いに素である事と同値である． $a_1x + b_2y + c_1, a_2x + b_2y + c_2$ から得られるラテン方陣が直交するためには,

全ての p,q に対して, 連立方程式
$a_1x+b_1y+c_1 \equiv p \pmod n$
$a_2x+b_2y+c_2 \equiv q \pmod n$
が解を持つ事が必要十分である.

2.3 立体魔法陣の構成

この考え方から, 同じように立体魔法陣を構成する事が出来る.
x 行 y 列 z 段に $\overline{x+y+z}$ を書き込む事により一つのラテン方陣が得られる. 同様に x 行 y 列 z 段に $\overline{x-y+z}$ を書き込む事により一つのラテン方陣が得られ, x 行 y 列 z 段に $\overline{x+y-z}$ を書き込む事により一つのラテン方陣が得られる. さらに, 任意の p,q,r に対して連立方程式
$x+y+z \equiv p \pmod n$
$x-y+z \equiv q \pmod n$
$x+y-z \equiv r \pmod n$
は解
$x \equiv \dfrac{n+1}{2} \times (q+r) \pmod n$
$y \equiv \dfrac{n+1}{2} \times (p-q) \pmod n$
$z \equiv \dfrac{n+1}{2} \times (p-r) \pmod n$
を持つ. したがって, この三つのラテン方陣から立体魔法陣を再現出来る.

2	0	1
0	1	2
1	2	0

3 段目

1	2	0
2	0	1
0	1	2

2 段目

0	1	2
1	2	0
2	0	1

1 段目

0	2	1
1	0	2
2	1	0

3 段目

2	1	0
0	2	1
1	0	2

2 段目

1	0	2
2	1	0
0	2	1

1 段目

2	0	1
0	1	2
1	2	0

3 段目

0	1	2
1	2	0
2	0	1

2 段目

1	2	0
2	0	1
0	1	2

1 段目

これらを合わせて, 次のように魔法陣が得られる.

202	020	111
010	101	222
121	212	000

3 段目

120	211	002
201	022	110
012	100	221

2 段目

011	102	220
122	210	001
200	021	112

1 段目

21	7	14
4	11	27
17	24	1

3 段目

16	23	3
20	9	13
6	10	26

2 段目

5	12	25
18	22	2
19	8	15

1 段目

見事に全ての和が 42 **になった！**

n が奇数である時はこの方法により魔法陣を作成出来る．一行の式で表すなら,x 行 y 列 z 段に $(\overline{x+y+z})n^2+(\overline{x-y+z})n+\overline{x+y-z}+1$ を書き込む.

3　n が 4 の倍数の時

この場合は結構簡単に出来る．まず, 次のように $1, 2, \cdots, n^3$ の数字を書き込む.

61	62	63	64
57	58	59	60
53	54	55	56
49	50	51	52

4 段目

29	30	31	32
25	26	27	28
21	22	23	24
17	18	19	20

2 段目

45	46	47	48
41	42	43	44
37	38	39	40
33	34	35	36

3 段目

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

1 段目

この時, どの縦, 横, 上下に並ぶ 4 数も等差数列をなすから, 両端の 2 項の和と, 中央の 2 項の和は等しい．よって, 次のようにいくつかの符号を逆にすると, どの縦, 横, 上下に並ぶ 4 数の和も 0 になる.

-61	62	63	-64
57	-58	-59	60
53	-54	-55	56
-49	50	51	-52

4 段目

29	-30	-31	32
-25	26	27	-28
-21	22	23	-24
17	-18	-19	20

2 段目

45	-46	-47	48
-41	42	43	-44
-37	38	39	-40
33	-34	-35	36

3 段目

-13	14	15	-16
9	-10	-11	12
5	-6	-7	8
-1	2	3	-4

1 段目

さらに, 符号を変えた各マス全てに $n^3+1=65$ を加える事により,
次のように 4 次立体魔法陣が得られる.

4	62	63	1
57	7	6	60
53	11	10	56
16	50	51	13

4 段目

36	30	31	33
25	39	38	28
21	43	42	24
48	18	19	45

2 段目

20	46	47	17
41	23	22	44
37	27	26	40
32	34	35	29

3 段目

52	14	15	49
9	55	54	12
5	59	58	8
64	2	3	61

1 段目

同様の方法を n が 4 の倍数であれば行う事が出来る. x, y, z のうち $\equiv 0, 1 \pmod 4$ であるものが k 個あるとする.
k が偶数なら x 行 y 列 z 段に $(z-1)n^2+(y-1)n+x$ を,
k が奇数なら x 行 y 列 z 段に $n^3+1-((z-1)n^2+(y-1)n+x)$ を書き込む.

4　$n \equiv 2 \pmod 4$ の時

2 次立体魔法陣が存在しない事は明らかである．$n \geq 6$ の場合のみを考えよう．

$n = 2m$ とする.m は奇数だから,m 次立体魔法陣 P が存在する．立方体を,$2 \times 2 \times 2$ の小立方体 m^3 個に分割する．P の x 行 y 列 z 段に k が書かれている時, その位置に対応する小立方体に,

$8(k-1)+$

1	6
7	4
8	3
2	5

を書き込む．この時, 縦, 横の和に誤差が生じる. これを後から補正する.

いくつかを,

4	6
7	1
5	3
2	8

1	6
4	7
8	3
5	2

6	1
7	4
3	8
2	5

6	1
4	7
3	8
5	2

7	6
1	4
2	3
8	5

7	4
1	6
2	5
8	3

などに取り替える.

$m = 3$ の時は, 各行, 列にから 2 つをA,1 つをBに取り替える．$m \geq 5$ の時は, 各行, 各列から 1 つをC,$\dfrac{m-5}{2}$ 個をD,1 つをE,$\dfrac{m-3}{2}$ 個をFに取り替える．これにより立体魔方陣を構成できる.

A	A	B
A	B	A
B	A	A

C	E	F		
	C	E	F	
		C	E	F
F			C	E
E	F			C

これで補正完了. 例えば $n=6$ だと次のような方陣が得られる.

161	164	28	31	132	135
166	167	30	25	134	129
52	55	81	84	188	191
54	49	86	87	190	185
108	111	212	215	1	4
110	105	214	209	6	7

6 段目

128	125	157	154	45	42
123	122	155	160	43	48
181	178	72	69	77	74
179	184	67	66	75	80
21	18	101	98	208	205
19	24	99	104	203	202

3 段目

168	165	29	26	133	130
163	162	27	32	131	136
53	50	88	85	189	186
51	56	83	82	187	192
109	106	213	210	8	5
107	112	211	216	3	2

5 段目

33	36	140	143	148	151
38	39	142	137	150	145
92	95	169	172	60	63
94	89	174	175	62	57
196	199	12	15	113	116
198	193	14	9	118	119

2 段目

121	124	156	159	44	47
126	127	158	153	46	41
180	183	65	68	76	79
182	177	70	71	78	73
20	23	100	103	201	204
22	17	102	97	206	207

4 段目

40	37	141	138	149	146
35	34	139	144	147	152
93	90	176	173	61	58
91	96	171	170	59	64
197	194	13	10	120	117
195	200	11	16	115	114

1 段目

5　おまけ

5.1　3 次立体魔方陣

21	7	14
4	11	27
17	24	1

3 段目

16	23	3
20	9	13
6	10	26

2 段目

5	12	25
18	22	2
19	8	15

1 段目

5.2　4 次立体魔方陣

4	62	63	1
57	7	6	60
53	11	10	56
16	50	51	13

4 段目

36	30	31	33
25	39	38	28
21	43	42	24
48	18	19	45

2 段目

20	46	47	17
41	23	22	44
37	27	26	40
32	34	35	29

3 段目

52	14	15	49
9	55	54	12
5	59	58	8
64	2	3	61

1 段目

5.3　5 次立体魔方陣

82	113	19	50	51
103	9	40	66	97
24	30	56	87	118
45	71	77	108	14
61	92	123	4	35

5 段目

111	17	48	54	85
7	38	69	100	101
28	59	90	116	22
74	80	106	12	43
95	121	2	33	64

4 段目

20	46	52	83	114
36	67	98	104	10
57	88	119	25	26
78	109	15	41	72
124	5	31	62	93

3 段目

49	55	81	112	18
70	96	102	8	39
86	117	23	29	60
107	13	44	75	76
3	34	65	91	122

2 段目

53	84	115	16	47
99	105	6	37	68
120	21	27	58	89
11	42	73	79	110
32	63	94	125	1

1 段目

5.4 6次立体魔方陣

161	164	28	31	132	135
166	167	30	25	134	129
52	55	81	84	188	191
54	49	86	87	190	185
108	111	212	215	1	4
110	105	214	209	6	7

6 段目

128	125	157	154	45	42
123	122	155	160	43	48
181	178	72	69	77	74
179	184	67	66	75	80
21	18	101	98	208	205
19	24	99	104	203	202

3 段目

168	165	29	26	133	130
163	162	27	32	131	136
53	50	88	85	189	186
51	56	83	82	187	192
109	106	213	210	8	5
107	112	211	216	3	2

5 段目

33	36	140	143	148	151
38	39	142	137	150	145
92	95	169	172	60	63
94	89	174	175	62	57
196	199	12	15	113	116
198	193	14	9	118	119

2 段目

121	124	156	159	44	47
126	127	158	153	46	41
180	183	65	68	76	79
182	177	70	71	78	73
20	23	100	103	201	204
22	17	102	97	206	207

4 段目

40	37	141	138	149	146
35	34	139	144	147	152
93	90	176	173	61	58
91	96	171	170	59	64
197	194	13	10	120	117
195	200	11	16	115	114

1 段目

6　後書き

楽しんでいただけたでしょうか. 僕は, こういう問題を考えてみて結構面白かったです. 特に, 実際に例えば 27 個の数の並びにおいて, 前後左右上下の 3 数を足し合わせると全て 42 になった時は, なると分かっていたにも関わらず, 結構感動しました（笑）

さて, 今回は 3 次元でしたが, より高次元においてはどうなるでしょうか.(もはや, 綺麗なのか綺麗じゃないのかもよくわかりませんね (^^;))

全く同じ方法によって,$n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$ の時は存在する事が証明出来ます. 奇数の時は,1 次式として,$x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 2x_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$ という n 個の多項式を用います.$n \equiv 2 \pmod 4), n \geq 6$ の時は, よく分かっていません. この方法では,"補正"の方法が高次元に拡張出来ないからです. 高次元においてもこのような補正が上手くいくのでしょうか. このような事について何か分かった人が居れば, 連絡下さると有難いです.

連絡先:nisimotomasaki@funifuni.net