どの連続する部分をとっても同じ性質を持つ数の話

H2-2-54 矢野 厚

どの連続する部分をとっても同じ性質を持つ数について考えます。

たとえば下でやっているのは素数、k 乗数です。(10 進法だったら 37 だと 37,3,7 が全て素数ですね) そのような条件を持つ数について考えようとしています。

あまりここに書く事も無いので準備して早速はじめましょう

1　記号説明と準備の定理

$A_1.A_2.\cdots.A_{n(k)}$ で k 進数表示をする。($1 < k \in \mathbb{N}$,$0 \leq A_i < k$,$A_1 \neq 0$,A_i は 10 進法表示) つまり

$$A_n.A_{n-1}.\cdots.A_{0(k)} = \sum_{i=0}^{n} k^i A_i$$

たとえば $13.13_{(14)} = 195_{(10)}$ のような書き方です。

係数は全て 10 進法表示することにし、何進法か明らかなときは $_{(n)}$ を省略するときもあります。

補題 1.1 自然数 N が n 進法表示されているときその表示法は一意的である。

要するに $N = 2.3_{(n)} = 3.4_{(n)}$ みたいなのはないということです。

略証

$$N = A_1.A_2.\cdots.A_k = B_1.B_2.\cdots.B_{k'}$$

とすると $A_k \equiv B_{k'} \pmod{n}$ で $0 \leq A_k, B_{k'} \leq n-1$ だから $A_k = B_{k'}$

よって $\dfrac{N - A_k}{n}$ に対しても同様な事を順に行えば $k = k'$,$A_i = B_i$ が示される

■

2　k 乗数

たとえば $49_{(10)}$ だったら 4,9,49 がすべて平方数です。とりあえずどこをとっても整数の $k > 1$ 乗となるという条件を満たす数を考えましょう。

とりあえず思いつくのは $1.0.0.0.\cdots.0_{(x^k)}(x > 1, x \in \mathbb{N})$.

または $A_1.A_2.\cdots.A_{n(x^k)}$ が条件を満たすとしたときに $A_1.A_2.\cdots.A_n.0.0.\cdots.0_{(x^k)}$ のように最後尾に 0 が連続してつくもの。このような場合を**自明な数**といい、以下考

えない事にします。(自明な数は明らかに x^k 進法である事が必要です。$a^k.0$ が k 乗数になるため)

2 桁ならば任意の k に対しうまく n 進法をとればどの連続する部分も k 乗数になる数が存在する事は明らかです。よって 3 桁以上について考えていく事にする。

さて本題に入っていきましょう

命題 2.1 $k \geq 2$ のとき条件を満たす数は $k+1$ 桁以下

証明

背理法で示す

${A_1}^k.{A_2}^k.\cdots.{A_{k+1}}^k.{A_{k+2}}^k{}_{(n)}$ が条件を満たすとする (明らかに各桁の数は k 乗数である事が必要)

$$
{A_1}^k.{A_2}^k{}_{(n)} = X^k (X > 0)
$$
$$
{A_1}^k.{A_2}^k.\cdots.{A_{k+1}}^k.{A_{k+2}}^k{}_{(n)} = (Xn + A)^k
$$

とすると

$$
{A_1}^k.{A_2}^k.\cdots.{A_{k+1}}^k.{A_{k+2}}^k{}_{(n)} \geq n^k({A_1}^k.{A_2}^k{}_{(n)})
$$

より $A > 0$ としてよい (等号成立の場合は自明な数)

$(X^k+1)n^k > (Xn+A)^k > X^k n^k + kX^{k-1}n^{k-1}A$ より $n^k > kX^{k-1}An^{k-1}$

$X^k \geq n$ より $X \geq n^{\frac{1}{k}}$ であるから $n^{\frac{1}{k}} > A$

よって $kXA^{k-1} < kX^{k-1}A < n$

$$
(Xn + A)^k = A^k + kA^{k-1}Xn + n^2 \sum_{i=0}^{k-2} ({}_kC_{i-2}A^{k-i-2}X^{i+2}n^i) \tag{1}
$$

$0 < A^k < n, \quad 0 < kA^{k-1}X < n$ であり、$\sum_{i=0}^{k-2}({}_kC_{i+2}A^{k-i-2}X^{i+2}n^i)$ の値によって A_{k+2}, A_{k+1} は変化しないから、補題 1.1 より

$$
{A_{k+2}}^k = A^k, \quad {A_{k+1}}^k = kA^{k-1}X
$$

したがって

$$
\frac{{A_{k+1}}^k}{{A_{k+2}}^k} = \frac{kX}{A} = q^k (q \in \mathbb{Q}, q \neq 0)
$$

となる q が存在するから

$$
\left(\frac{kX}{A}\right)^{k-1}({A_{K+1}}^k.{A_{k+2}}^k)_{(n)} = nk^kX^k + Ak^{k-1}X^{k-1}
$$

は k 乗数, これを T^k とする

また ${A_1}^k.{A_2}^k.{A_3}^k = X^k n + {A_3}^k$ は k 乗数だから $nk^kX^k + k^k{A_3}^k$ は k 乗数, これを S^k とする。

(1) において n^i の係数は全て正, よって $X^kn^k < X^kn^k + {A_3}^kn^{k-1} < (Xn+A)^k < (X^k+1)n^k$ であるから ${A_3}^k \geq kX^{k-1}A$ よって

$$\frac{k^k{A_3}^k}{Ak^{k-1}X^{k-1}} = \frac{k{A_3}^k}{AX^{k-1}} \geq \frac{k^2X^{k-1}A}{AX^{k-1}} = k^2 > 1$$
$$\therefore S^k > T^k$$

ここで

$$T > (nk^kX^k)^{\frac{1}{k}} > kn^{\frac{2}{k}}$$

よって

$$(T+1)^k > T^k + kT^{k-1} > nk^kX^k + k^kn^{\frac{2(k-1)}{k}} > nk^kX^k + k^kn$$

$n > {A_3}^k$ だから

$$(T+1)^k > S^k > T^k$$

よって $S \notin \mathbb{Z}$ となり矛盾.

よって自明な場合を除き、$k+2$ 桁以上の数ではどの連続する部分をとっても k 乗数となる事は無い事が示された

■

と証明をうんちゃら書いてきましたが実際はもっといい評価を ($k>2$ のとき) 与える事が出来ます。$k=2$ のときは 3 桁以下ということなのですがこれにはよりよい評価を与える or 3 桁の例を見つける、ことが出来ていません。出来た人は教えてください。

では $k>2$ の場合を考えましょう。

命題 2.2 $k>2$ のとき条件を見たす数は k 桁以下

証明 ${A_1}^k.{A_2}^k.\cdots.{A_{k+1}}^k{}_{(n)}$ が条件を満たすとすれば ${A_1}^k.{A_2}^k.\cdots.{A_{k+1}}^k{}_{(n)}$, ${A_2}^k.\cdots.{A_{k+1}}^k{}_{(n)}$ は k 乗数、それぞれ X^k,Y^k とする。($Y \neq 0$)

$$X^k = Y^k + (A_1n)^k$$

となりフェルマーの大定理よりこの式を満たす $X, Y, A_1, n.k$ の組は存在しない

よって条件を満たす数は k 桁以下であることが示された

■

反則的な定理を使いましたが使わずにさらにいい評価が得られたりします

定理 2.1 $k>2$ のとき自明な数を除くと条件を満たす数は *2* 桁以下

要するに $X^k.Y^k{}_{(\frac{Z^k-Y^k}{X^k})}$ の形に限定されるという事です。

証明

$X^k.Y^k.Z^k{}_{(n)}$ が条件を満たすとしたとき $(Z^k \neq 0, X^k \neq 0)$ $X^kn^2+Y^kn+Z^k, X^kn+Y^k, Y^kn+Z^k$ が k 乗数である事が必要十分

ここでひとつ補題を示します。

補題 2.3 $X^k.Y^k.Z^k{}_{(n)}$ が条件を満たすならば

$$X^kZ^k > Y^{2k}$$

証明

$$(X^kn+Y^k)(Y^kn+Z^k) = X^kY^kn^2 + (Y^{2k}+X^kZ^k)n + Y^kZ^k$$

と

$$Y^k(X^kn^2+Y^kn+Z^k) = X^kY^kn^2 + Y^{2k}n + Y^kZ^k$$

は共に k 乗数, それぞれ A^k, B^k とする $(A, B>0)$. すると $A^k > B^k$ だから $A>B$, よって $A \geq B+1$

$$B > \left(X^kY^kn^2\right)^{\frac{1}{k}} = XYn^{\frac{2}{k}}$$

よって

$$\begin{aligned} A^k \geq (B+1)^k > B^k + kB^{k-1} > B^k + kX^{k-1}Y^{k-1}n^{\frac{2(k-1)}{k}} \\ \therefore X^kZ^kn > kX^{k-1}Y^{k-1}n^{\frac{2(k-1)}{k}} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{X^kZ^k}{Y^{2k}} &> \frac{kX^{k-1}Y^{k-1}n^{\frac{2(k-1)}{k}}}{Y^{2k}} \\ &= \frac{kX^{k-1}n^{\frac{2(k-1)}{k}}}{Y^{k+1}} > \frac{kX^{k-1}n^{\frac{2(k-1)}{k}}}{n^{\frac{k+1}{k}}} \\ &= kX^{k-1}n^{\frac{k-3}{k}} > 1 (\because k \geq 3) \end{aligned}$$

$\therefore X^kZ^k > Y^{2k}$

■

仮定より $k^k(X^kn^2+Y^kn+Z^k)(X^kn+Y^k)^{k-2}$ は k 乗数である。そうならない事を示せば十分である。

命題 2.4 $k > 2$ のとき $(kX^kn+(k-1)Y^k+1)^k > k^kX^k(X^kn^2+Y^kn+Z^k)(X^kn+Y^k)^{k-2} > (kX^kn+(k-1)Y^k)^k$

これが示されれば $k^kX^k(X^kn^2+Y^kn+Z^k)(X^kn+Y^k)^{k-2}$ は k 乗数となり得ないのでこの定理の証明は終了する。では証明をしてみよう。今までと方針は変わってないなあ。

証明

1. $\boldsymbol{k^kX^k(X^kn^2+Y^kn+Z^k)(X^kn+Y^k)^{k-2} > (kX^kn+(k-1)Y^k)^k}$
   $Y=0$ のとき $k^kX^kk^2n^k+k^kX^{k(k-1)}Z^kn^{k-2} > k^kx^{k^2}n^k$ となり可. 以下 $Y>0$ とする。
   $X^kk^k(X^kn^2+Y^kn+Z^k)(X^kn+Y^k)^{k-2}-(kX^kn+(k-1)Y^k)^k$ の $n^l(0 \le l \le k)$ の係数を a_l とする。(a_0 は定数項)
   $l=0$ のとき

$$\begin{aligned} a_0 &= k^kX^kY^{k(k-2)}Z^k-(k-1)^kY^{k^2} \\ &\ge Y^{k^2}(k^k-(k-1)^k)(\because \text{補題 } 2.3) \\ &> 0 \end{aligned}$$

   $l=1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= \left\{k^kX^kY^{k(k-1)}+(k-2)k^kX^{2k}Y^{k(k-3)}Z^k\right\}-k^2(k-1)^{k-1}X^kY^{k(k-1)} \\ &> k^kX^kY^{k(k-3)}\{Y^{2k}+(k-2)X^kZ^k\}-k^k(k-1)X^kY^{k(k-1)} \\ &\ge k^kX^kY^{k(k-3)}\left\{(k-1)Y^{2k}-(k-1)Y^{2k}\right\}=0 \end{aligned}$$

   $l=k$ のとき

$$a_k = k^kX^{k^2}-k^kX^{k^2}=0$$

   $l=k-1$ のとき

$$a_{k-1} = \left\{(k-2)k^kX^{k(k-1)}Y^k+k^kX^{k(k-1)}Y^k\right\}-(k-1)k^kX^{k(k-1)}Y^k=0$$

   $k=3$ のときは a_0,a_1,a_2,a_3 が全て非負であるので $3^3X^3(X^3n^2+Y^3n+Z^3)(X^3n+Y^3)^{3-2} > (3X^3n+(3-1)Y^3)^3$ が示された。
   $k>3$ のときを考えようとりあえず補題

   補題 2.5 $2 \le l \le k-2$ のとき $k^{k-l} > (k-1)^{k-l}+(k-l)(k-1)^{k-l-1}$

   証明

$$k^{k-l} = \{(k-1)+1\}^{k-1} > (k-1)^{k-l}+(k-l)(k-1)^{k-l-1} \qquad \blacksquare$$

$2 \leq l \leq k-2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_l &= \{{}_{k-2}C_l k^k X^{(kl+k)} Y^{k(k-l-2)} Z^k +_{k-2} C_{l-1} k^k X^{kl} Y^{k(k-l)} \\
&\quad +_{k-2} C_{l-2} k^k X^{kl} Y^{k(k-l)}\} -_k C_l (k-1)^{k-l} k^l X^{kl} Y^{k(k-l)} \\
&=_{k-2} C_l k^k X^{(kl+k)} Y^{k(k-l-2)} Z^k +_{k-1} C_{l-1} k^k X^{kl} Y^{k(k-l)} \\
&\qquad\qquad -_k C_l (k-1)^{k-l} k^l X^{kl} Y^{k(k-l)} \\
&= k^l X^{kl} Y^{k(k-l-2)} \left\{ {}_{k-2}C_l k^{k-l} X^k Z^k +_{k-1} C_{l-1} k^{k-l} Y^{2k} -_k C_l (k-1)^{k-l} Y^{2k} \right\} \\
&> k^l X^{kl} Y^{k(k-l-2)} \left\{ {}_{k-2}C_l (k-1)^{k-l} Y^{2k} +_{k-1} C_{l-1} Y^{2k} (k-1)^{k-l} \right. \\
&\qquad \left. +_{k-1} C_{l-1} Y^{2k} (k-l)(k-1)^{k-l-1} -_k C_l (k-1)^{k-l} Y^{2k} \right\} (\because \text{補題 } 2.5) \\
&> (k-1) \left({}_{k-2}C_l +_{k-1} C_{l-1} -_k C_l \right) +_{k-1} C_{l-1} (k-l) \\
&= (k-1)({}_{k-2}C_l -_{k-1} C_l) +_{k-1} C_{l-1} (k-l) \\
&= -{}_{k-2}C_{l-1}(k-1) +_{k-1} C_{l-1}(k-l) \\
&= -\frac{(k-2)!(k-1)}{(k-l-1)!(l-1)!} + \frac{(k-1)!(k-l)}{(k-l)!(l-1)!} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $0 \leq \forall l \leq k-2, \quad a_l > 0, \quad a_k = a_{k-1} = 0$ であるので、

$$
k^k X^k (X^k n^2 + Y^k n + Z^k)(X^k n + Y^k)^{k-2} > (kX^k n + (k-1)Y^k)^k
$$

2. $\boldsymbol{(kX^k n + (k-1)Y^k + 1)^k > k^k X^k (X^k n^2 + Y^k n + Z^k)(X^k n + Y^k)}$

命題 2.6 $k > 3$ のとき $0 \leq \forall l \leq k-2, \quad a_l \leq {}_{k-2}C_l k^k X^{kl+k} Y^{k(k-l-2)} Z^k$

証明

$l = 0$ のとき

$a_0 = k^k X^k Y^{k(k-2)} Z^k - (k-1)^k Y^{k^2} < k^k X^k Y^{k(k-2)} Z^k$ なので適

$l = 1$ のとき

先ずこの補題を示します

補題 2.7 $k \geq 3$ のとき $(k-1)^{k-1} > k^{k-2}$

証明

辺々 $\dfrac{k}{(k-1)^{k-1}}$ 倍した $k > \left(1 + \dfrac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ を示せばよい

$$
\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{{}_{k-1}C_l}{(k-1)^l}
$$

$$
\frac{\frac{{}_{k-1}C_l}{(k-1)^l}}{\frac{{}_{k-1}C_{l+1}}{(k-1)^{l+1}}} = \frac{(k-1)(k-1)!(l+1)!(k-l-2)!}{l!(k-1)!(k-l-1)!} = \frac{(k-1)(l+1)}{k-l-1} = \frac{kl+k-l-1}{k-l-1}
$$

$\frac{{}_{k-1}C_l}{(k-1)^l} > 0$ に注意して,$l > 0$ のとき $\frac{{}_{k-1}C_l}{(k-1)^l} > \frac{{}_{k-1}C_{l+1}}{(k-1)^{l+1}}$

$$\therefore \sum_{l=0}^{k-1} \frac{{}_{k-1}C_l}{(k-1)^l} < 1 + \frac{k-1}{k-1} \times (k-1) = k(k > 2)$$

■

$$a_1 - (k-2)k^k X^{2k} Y^{k(k-3)} Z^k = k^k X^k Y^{k(k-1)} - k^2 X^k (k-1)^{k-1} Y^{k(k-1)}$$
$$k^2(k^{k-2} - (k-1)^{k-1}) X^k Y^{k(k-1)} < 0 \quad \text{よって適}$$

$2 \leq l \leq k-2$ のとき ($k = 3$ のときは考えないでよい)

$$\begin{aligned} {}_{k-2}C_l k^k X^{kl+k} Y^{k(k-l-2)} Z^k - a_l &= {}_k C_l (k-1)^{k-l} k^l X^{kl} Y^{k(k-l)} - {}_{k-1} C_{l-1} k^k X^{kl} Y^{k(k-l)} \\ &\geq \left\{ (k-1)^{k-l} \frac{k!}{l!(k-l)!} - \frac{(k-1)!}{(l-1)!(k-l)!} k^{k-l} \right\} \\ &= \frac{(k-1)!}{(l-1)!(k-l)!} \left(\frac{k(k-1)^{k-l}}{l} - k^{k-l-1} \right) \end{aligned}$$

よって $\frac{(k-1)^{k-l}}{l} \geq k^{k-l-2}$ を示せばよい. 少し条件を強めて示す.

補題 2.8 $\forall 1 \leq l \leq k-1, \quad \frac{(k-1)^{k-l}}{l} \geq k^{k-l-1}$

特に $l \neq k-1$ のときは $\frac{(k-1)^{k-l}}{l} > k^{k-l-1}$

証明

辺辺 $\frac{l}{k^{k-l}}$ 倍した

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-l} \geq \frac{l}{k}$$

を示す.

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-l} = \sum_{i=0}^{k-l} \frac{{}_{k-l}C_i}{(-k)^i}$$

$$i > 0 \text{ のときは} \frac{\frac{{}_{k-l}C_i}{k^i}}{\frac{{}_{k-l}C_{i+1}}{k^{i+1}}} = \frac{k(k-l)!(i+1)!(k-l-i-1)!}{i!(k-l)!(k-l-i)!} = \frac{ki+k}{k-l-i} > 1$$

よって $i \geq 1$ において $\frac{{}_{k-l}C_i}{(-k)^i}$ の絶対値は狭義単調減少。よって i に関して $\frac{{}_{k-l}C_i}{(-k)^i}$ は正負が交互に現れるから $l \leq k-2$ のとき $\sum_{i=2}^{2m-1} \frac{{}_{k-l}C_i}{(-k)^i} (m \geq 2)$ は m に関して

狭義単調増加よって

$$\sum_{i=0}^{k-l} \frac{{}_{k-l}C_i}{(-k)^i} \geq 1 - \frac{k-l}{k} = \frac{l}{k}$$

等号成立は $l = k-1$ のとき ■

よって $\dfrac{(k-1)^{k-l}}{l} \geq k^{k-l-2}$ も示された ■

命題 2.6 より

$$\begin{aligned} k^k X^k (X^k n^2 + Y^k n + Z^k)(X^k n + Y^k)^{k-2} - (kX^k n + (k-1)Y^k)^k \\ < \sum_{l=0}^{k-2} k^k n^l X^{k(l+1)} Y^{k(k-l-2)} Z^k \\ = k^k X^k Z^k (X^k n + Y^k)^{k-2} \end{aligned}$$

よって $(kX^k n+(k-1)Y^k+1)^k-(kX^k n+(k-1)Y^k)^k > k(kX^k n+(k-1)Y^k)^{k-1}$ だから

$$k(kX^k n + (k-1)Y^k)^{k-1} > k^k X^k Z^k (X^k n + Y^k)^{k-2}$$

を示せばよい。

$Z^k < n$ より $f(n) = k(kX^k n + (k-1)Y^k)^{k-1} - k^k X^k n (X^k n + Y^k)^{k-2}$ が正となる事を示そう

$f(n)$ の n^i の係数を b_i とすると $b_0 \geq 0, \quad l \geq 1$ のときは、

$$\begin{aligned} b_l &= {}_{k-1}C_l k^{l+1} (k-1)^{k-l-1} X^{kl} Y^{k(k-l-1)} - {}_{k-2}C_{l-1} k^k X^{kl} Y^{k(k-l-1)} \\ &= k^{l+1} X^{kl} Y^{k(k-l-1)} \left(\frac{(k-1)^{k-l-1}(k-1)!}{l!(k-l-1)!} - \frac{k^{k-l-1}(k-2)!}{(l-1)!(k-l-1)!} \right) \\ &= \frac{k^{l+1} X^{kl} Y^{k(k-l-1)} (k-2)!}{(l-1)!(k-l-1)!} \left(\frac{(k-1)^{k-l}}{l} - k^{k-l-1} \right) \\ &> 0 (\because \text{補題 } 2.8) \end{aligned}$$

■

3　素数

実はこの部誌は某合宿 (私は参加してません) で**どこできっても前の部分が素数な数**の事が話題になっていたらしいのですが、私はを条件を聞き間違えて (かなり強い条件になってるなぁ。よって簡単になる) しまったということがもとねただったりします。その条件を間違えたというのがこれなのですけれども

とりあえず次の命題しか判りません。

命題 3.1 p を $p|n-1$ を満たす最小の素数とすると、どの連続する部分も素数ならば高々$2p-1$ 桁

$A_1.A_2.\cdots.A_{2p}.A_{k(n)}(k \geq 2p+1)$ が条件を満たすとし最高桁から l 桁連続している部分を $P_l = A_1.A_2.\cdots.A_{l(n)}$ とすると、鳩ノ巣原理より

$$\exists i,j,k \quad P_i \equiv P_j \equiv P_k \pmod p (1 \leq i < j < k \leq 2p+1)$$

ここで $P_i \equiv P_j \pmod p (i<j)$ のとき

$$\begin{aligned} A_{i+1}.A_{i+2}.\cdots.A_j &\equiv P_j - P_i n^{j-i} \pmod p \\ &\equiv P_i - P_i (\because p|n-1) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

$A_{i+1}.A_{i+2}.\cdots.A_j$ は素数だから $A_{i+1}.A_{i+2}.\cdots.A_j = p$ よって $j=i+1$,$A_{i+1}=p$ となる。

よって $A_{i+1}=A_{i+2}=p$ よって $A_{i+1}.A_{i+2}=p(n+1)$ となり素数で無いので矛盾

さらに $A_1.A_2.\cdots.A_{2p}$ が条件を満たすとすると、$\nexists i,j,k \quad P_i \equiv P_j \equiv P_k \pmod p (1 \leq i < j < k \leq p+1 P_i)$ であるから

$$P_{a_i} \equiv P_{b_i} \equiv i (0 \leq i \leq p-1)$$

よって $\{a_i, b_i\} = i|1 \leq i \leq 2p$ となるので

$$A_1.A_2.\cdots.A_{2p} \equiv 2\sum_{i=0}^{p-1} i = p(p-1) \equiv 0 \pmod p$$

となり素数である事に矛盾。よってどの連続する部分も素数ならば高々$2p-1$ 桁 ■

どの連続する桁をとっても素数でないというのも考えてみるけれども $n \geq 5$ のときは $4.0.\cdots.0.0$ とすればいいし,$n=4$ のときは $1.0.\cdots.0.0$ とすればいい。$n=2,3$ のときは各桁に使える数は 1,0 のみ 1.0 はそれぞれ素数なので $1.1.\cdots.1$ の形に限定されるが $1.1_{(2)}=3$,$1.1.1_{(3)}=13$ と素数になり条件を満たさない。

4　おまけ

”連続する全ての部分が同じ性質を持つ”という事は非常に強い条件です。そのせいかは分かりませんけど、割といい結果が出ました。結構気に入ってます。

後半の素数の方は私では　$\bmod p (p < n)$ による議論しか出来そうに無いですけれども、これは元の問題には全く役に立ちません。いい方法があったら教えてください。

こういう系列の問題はいくらでも作れるので、問題を考え (or 作り) たくなったときにやってみてはいかがでしょうか。たとえば私が考えたの (k 乗数と素数) と同じでもでも条件を緩めたりするだけでいくらでも問題が出来ます。

又このレポートに証明調 (という言い方は一般的ではないと思うけど、である。うんちゃらによりみたいなの) と、ですます調が混合されているのはこのレポートが"〜の話"だからです。

感想、間違いの指摘等は　私の元に直接言いに来るまたは yanoatsushi@fm2.seikyou.ne.jp にメールをしてください。

最後まで読んでいただき有難うございました。