正方形の順詰め込み問題

高校２年１組２６番　伊藤佑樹

1　はじめに

　こんにちは。本日は、数学研究部にお越しくださいまして、ありがとうございます。この記事の内容は、「正方形の順詰め込み問題」[1]についての私の考察です。

　「正方形の順詰め込み問題」というのは、一辺が 1 から n までの正方形を重ならないように中に配置できるような最小の正方形の一辺の長さを求めようという問題です。一見単純に見えますが、これは実は未解決問題です。ですが、この最小の正方形の一辺の長さにできるだけ良い評価を与えることができれば嬉しいと思い、これを今年の部誌のテーマとすることにしました。

　興味を持たれた方も、そうでない方も読んでいただければ幸いです。

2　準備

　さて、このセクションではこの問題を考える上で必要となることを確認していきます。

　まずは、この問題を正確に記述しておきます。

命題 2.1 辺の長さがそれぞれ $1, 2, 3, \ldots, n$ の正方形をそれぞれ一つずつ重ならないように中に配置することができるような最小の正方形の辺の長さを求めよ。

[1] この言葉は筆者の造語です。他ではたぶん通用しません。

あと、この値を記号化しておきます。

定義 2.2 辺の長さがそれぞれ $1, 2, 3, \ldots, n$ の正方形をそれぞれ一つずつ重ならないように中に配置することができる最小の正方形の辺の長さを $f(n)$ とする。

基本的な計算における事項を一応書いておきます。

命題 2.3 *1.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

あと、関数がどんな割合で増えるかを表すものとして、次のオーダーという概念があります。

定義 2.4 (オーダー) $\forall x \geq a, g(x) > 0$ のとき、
$\exists M > 0$（定数）,$\forall x \geq a, Mg(x) \geq |f(x)|$ が成り立つ時、
$f(x) = O(g(x))$
と表す。

つまり、O は、ある関数がどんな関数と同じ割合で増えるかということを表すためのものです。

3 いくつかの例

ここでは、具体的な n の値に対する $f(n)$ の値を求めます。
まずは、自明なものから。

定理 3.1 $f(1) = 1$

これは、証明なしでいいでしょう。

定理 3.2 一辺の長さがそれぞれ x, y の正方形を中に重ならないように一つずつ含むことができる最小の正方形の一辺の長さは $x + y$ である。

証明

一辺が x, y の正方形をそれぞれ A, B、そしてこれを含む正方形を C とする。
A, B, C のそれぞれの辺が平行になっているとき、明らかに C の一辺の最小値は $x+y$ である。ここからは、A と C は同じ向きではないと仮定する。A の頂点を通り、C のそれぞれの辺と平行な直線によって、C と向きが同じな正方形 A_1 を作る。これは A を囲んでいる。A_1 の一辺を $x_1 = tx(t > 1)$ とする。いま、A_1 の中心を O として、O を中心に、A_1 を $\dfrac{1}{t^2}$ 倍に縮小する。これによりできる正方形を A_2 とする。すると、A_2 は A に接するように含まれ、A_2 の一辺は $x_2 = \dfrac{x}{t}$ となる。A と B は交わらないので、A_2 の辺 $e_i(i = 1, 2, 3, 4)$ を両方向に延長してみるとき、B は凸な図形だから両方とも同時には B と交わらない。同様に $e_j(j = 1, 2)$ の一方への延長が B とぶつかれば反対方向への e_{j+2} の延長は B と交わることがない。よって、A_2 のある頂点から出る両辺を A_1 の辺まで延長して B と交わらない A_3 を作る事が出来る。
A_3 の一辺の長さを x_3 とすれば、

$$x_3 = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} = x$$

これより、A_3 の中に C と向きが同じな正方形をとることができる。B にも同様な事ができる。これは、3 つの正方形の向きが同じ場合に帰着されている。よって、示された。

証明終

定理 3.3 $f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7, f(5) = 9$
$f(6) = 11, f(7) = 13, f(8) = 15$

証明
定理 3.2 より、$f(n) \geq 2n - 1$ となる。
具体的な構成法は省略させていただきます。簡単に構成できるので、考えてみてください。

証明終

4　下からの評価

　これに関しては、今のところ行えているのは面積による評価のみです。

定理 4.1 $f(n) \geq \sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

証明
一辺が $f(n)$ の正方形の中に重なりなく、一辺が $1, 2, 3, \ldots, n$ の正方形が入っているので、

$$(f(n))^2 \geq \sum_{k=1}^{n} k^2$$

が成り立ち、これより示される。

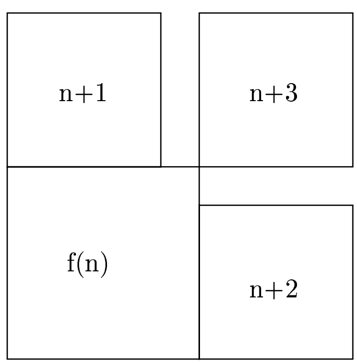
証明終

この評価は $O(n\sqrt{n})$ であることに注意しておこう。

5　上からの評価

5.1　帰納的な構成

　まずは、帰納的に構成することを考えていきます。
方針 1
一辺 $f(n)$ の正方形を一辺 $n+1, n+2, n+3$ の正方形で拡大する。
$f(n) \geq n+2$ のときに、下図のようにできる。（定理 4.1 によって、ある n_0 に対し、$n > n_0$ ならばこれが成り立つようになっている。）



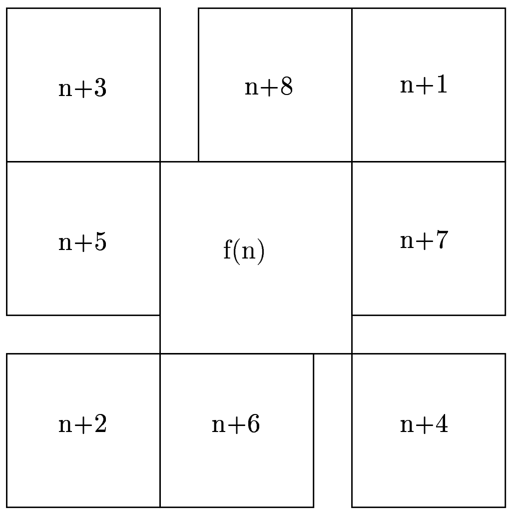
このとき、

$$\begin{aligned} f(n+3m) &\le f(n)+\sum_{k=1}^{m}(n+3k) \\ &= f(n)+\frac{3m(m+1)}{2}+mn \\ &= f(n)+\frac{3}{2}m^2+\frac{2n+3}{2}m \end{aligned}$$

となる。
$3m=t$ とおけば、次のように記述される。

$$f(n+t) \le f(n)+\frac{1}{6}t^2+\frac{2n+3}{6}t$$

方針 2
一辺 $f(n)$ の正方形の周りを $n+1, n+2, \ldots, n+8$ の正方形で囲む。
$f(n) \ge n+8$ のとき、下の図のようにできる。（定理 4.1 によって、ある n_0 に対し、$n > n_0$ ならばこれが成り立つようになっている。）



これより、$f(n) \ge n+8$ のとき、$f(n)+2n+14 \ge f(n+8)$ となる。
つまり、n が $f(n) \ge n+8$ を満たしている時、

$$\begin{aligned} f(n+8m) &\le f(n)+\sum_{k=1}^{m}(2n+16k-2) \\ &= f(n)+2mn+8m(m+1)-2m \\ &= f(n)+8m^2+(2n+6)m \end{aligned}$$

が成り立つ。
$8m = t$ とおけば、次のように記述される。

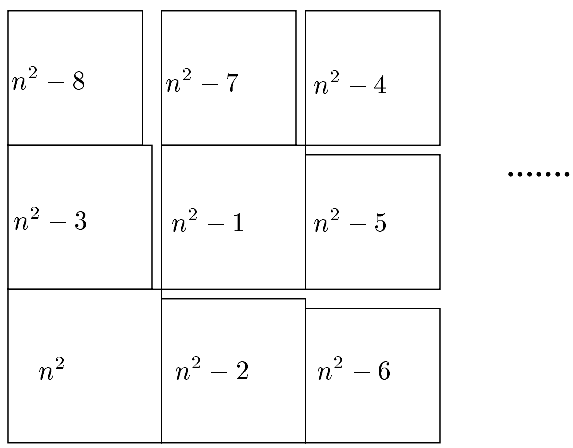
$$f(n+t) \leq f(n) + \frac{1}{8}t^2 + \frac{n+3}{4}t$$

これは、**方針** 1 に比べて、t^2 の係数が小さくなっていることから、方針 1 よりも厳しい評価にはなっている。
しかし、このオーダーは、$O(n^2)$ で表される。これにより、この評価は下からの先ほどの評価と比べて飛躍的に増大してしまい、あまり良い評価だとは言えません。

ということで、他の構成法を考えてみます。

5.2 直接的な構成法

方針 3
ここでは、n^2 個の正方形を配置することを考える。
まず、左下の隅に、一辺が n^2 の正方形を置く。次に、その右上、右、上に一辺がそれぞれ n^2-1, n^2-2, n^2-3 の正方形を置く。そして、それと同じように、一辺が $n^2-4, n^2-5, n^2-6, n^2-7, n^2-8$ の正方形を置く。
このようなことを繰り返す。（下図参照）



このとき、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
f(n^2) &\leq \sum_{k=0}^{n-1}(n^2-k^2) \\
&= n\cdot n^2 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n
\end{aligned}
$$

このオーダーは、$O(n\sqrt{n})$ になっている。
あとは、この係数に着目してみよう。この構成法では、$n\sqrt{n}$ の係数は $\dfrac{2}{3}$ である。また、下からの評価、つまり $\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ においての $n\sqrt{n}$ の係数は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となっているとみなせる。
$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\cdots, \dfrac{2}{3} = 0.666\cdots$ なので、まだ 0.1 弱の差がある。この差をできるだけ縮めることを考える。

5.3 改良された構成法

さて、どのようにすれば、$n\sqrt{n}$ の係数を小さく出来るかと考えていたところ、先ほどの方針を少し改良して次のようなものを思いつきました。

方針 4
kn^2 個の正方形を配置することを考える。これらの正方形を k 個のグループ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ に分け、各グループ A_i には、一辺が $(i-1)n^2+1$ 以上 in^2 以下の正方形が含まれているようにする。そして、同数ずつ各グループから大きい順に選び出し、これらをできるだけ正方形に近い形に並べる。これを繰り返し、それらを方針 3 と同じように並べていく。

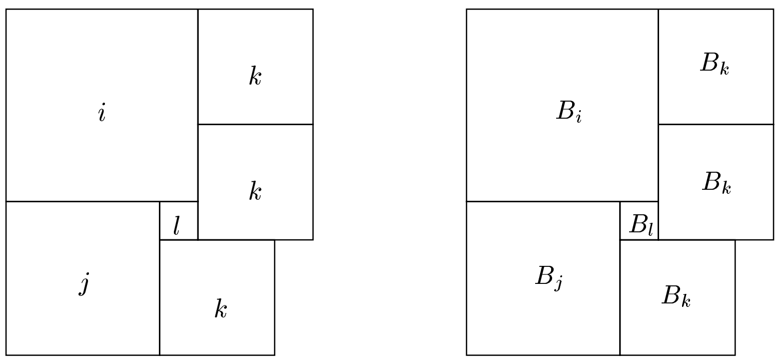
この方針を使うことで、次の定理が示される。

定理 5.1 もし、一辺が $1, 2, 3, \ldots, k$ の正方形が $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 個ずつあり、それによって一辺が $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ の正方形が構成できるとき、次の式が成り立つ。

$$f\left(\frac{k^2(k+1)(2k+1)}{6}n^2\right) \leq \frac{1}{216}k(k+1)^2(2k+1)^2\{6kn^3-(n-1)n(2n-1)\}$$

証明

まず、$\dfrac{k^2(k+1)(2k+1)}{6}n^2$ 個の正方形を k 個のグループに分ける。
各グループを $B_1, B_2, \ldots, B_k$ として、
グループ B_i には一辺が $\dfrac{(i-1)k(k+1)(2k+1)}{6}n^2+1$ 以上 $\dfrac{ik(k+1)(2k+1)}{6}n^2$ 以下の正方形が含まれているとする。そして、これらのグループから大きい順にそれぞれ $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 個ずつの正方形を取り出し、それらを含む正方形を作る。ここで作る正方形において、$\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 個ずつある一辺が $1, 2, 3, \ldots, k$ の正方形により、構成される一辺が $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ の正方形の中で、一辺が i の正方形が配置されているところには、B_i から取り出した正方形を配置する。1 回目の操作では、仮定より一辺が $\left(\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)^2 n^2$ の正方形で取り出した正方形を全て含むことが出来る。



さて、この操作を n^2 回繰り返すことになるが、取り出した正方形を含むことが出来るような正方形の一辺は小さくしていくことができるはずである。では、どれだけ小さくしていくことができるのであろうか。

一回の操作を経ることで、取り出される正方形の一辺は $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ だけずつ小さくなっている。
そして、縦横には、$\left(\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)^2 n^2$ を $\left(\dfrac{k^2(k+1)(2k+1)}{6}\right)n^2$ で割った値以上個の正方形が並んでいるはずである。この値は $\dfrac{(k+1)(2k+1)}{6}$ になっている。

これより、一回の操作を経ることで、取り出した正方形を含むことが出来るような正方形の一辺の長さは少なくとも $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$ だけ小さくすることができる。

そして、n^2 回の操作を行った後に、取り出した正方形を含むことが出来るような正方形が n^2 個できており、これを方針 3 のように大きい方から並べる。以上により、次が成り立つ。

$$f\left(\frac{k^2(k+1)(2k+1)}{6}n^2\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)^2 n^2 - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\frac{(k+1)(2k+1)}{6}(i-1)^2\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{k^2(k+1)^2(2k+1)^2}{36}n^3\right) - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\frac{(k+1)(2k+1)}{6}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}$$

$$= \frac{1}{216}k(k+1)^2(2k+1)^2\{6kn^3 - (n-1)n(2n-1)\}$$

以上より、示された。

証明終

では、このオーダーとその係数を調べてみましょう。

まず、オーダーは明らかに $O(n\sqrt{n})$ です。

では、この係数を計算してみましょう。

$$\frac{1}{108}k(k+1)^2(2k+1)^2(3k-1) \div \left\{\frac{k^2(k+1)(2k+1)}{6}\sqrt{\frac{k^2(k+1)(2k+1)}{6}}\right\}$$

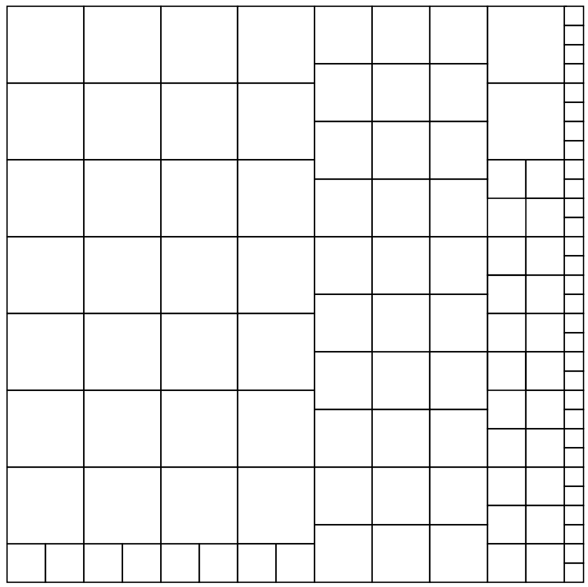
$$= \frac{(k+1)(2k+1)(3k-1)}{3k^2\sqrt{6(k+1)(2k+1)}}$$

となります。そして、ここで $k \to \infty$ とすれば、この値は、$\frac{1}{\sqrt{3}}$ となります。これは、下からの評価と同じです。もちろん、この定理は一辺が $1, 2, 3, \ldots, k$ の正方形が $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 個ずつあり、それによって一辺が $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ の正方形が構成できるという条件下においてしか成り立つことしか示していませんが、これは上からの評価でも $n\sqrt{n}$ の係数を $\frac{1}{\sqrt{3}}$ にすることができることを示唆しているのではないでしょうか？

　では、具体的な例を挙げてみましょう。

系 5.2 $f(120n^2) \leq \dfrac{75}{2}(22n^3 + 3n^2 - n)$

証明
次のように、一辺が $1, 2, 3, 4$ の正方形を 30 個ずつ使って一辺が 30 の正方形を構成することが出来る。



定理 5.1 より示された。

証明終

ちなみに、この $n\sqrt{n}$ の係数は、$0.6275\cdots$ となっている。

系 5.3 $f(275n^2) \leq \dfrac{605}{6}(28n^3 + 3n^2 - n)$

証明
一辺が $1, 2, 3, 4, 5$ の正方形を 55 個ずつ使って一辺が 55 の正方形を構成することが出来る。こちらも簡単に構成することが出来るので、一度試してみてください。定理 5.1 より示された。

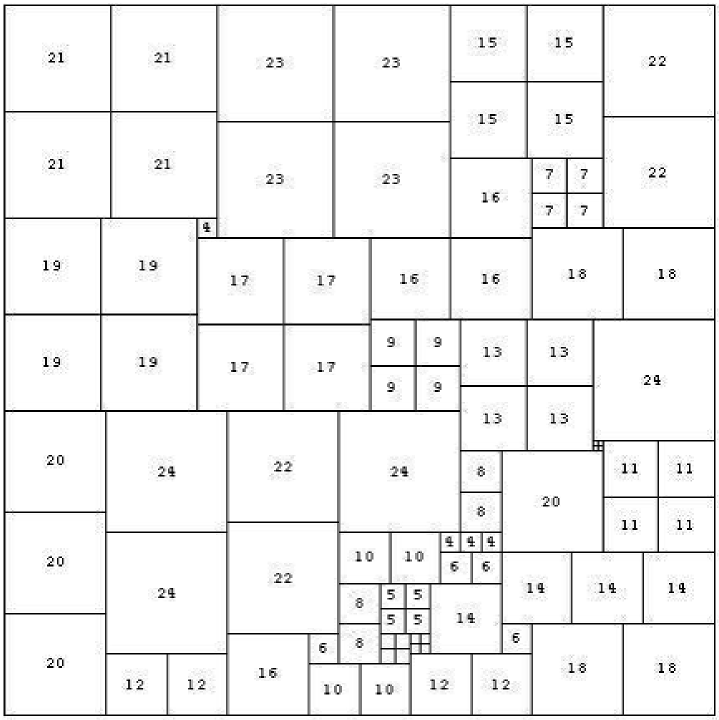
証明終

ちなみに、この $n\sqrt{n}$ の係数は、$0.6191\cdots$ となっている。

定理 5.4 $f(96n^2) \le \dfrac{1652}{3}n^3 + 14n^2 - \dfrac{14}{3}n$

証明

次の図のように一辺が $1, 2, 3, \ldots, 24$ の正方形を 4 個ずつ使って一辺が 140 の正方形を構成することが出来る。このとき、縦横には少なくとも 7 個の正方形が並んでいることに注意しておこう。



方針 4 に従う。$96n^2$ 個の正方形を 24 個のグループに大きい方から順に $4n^2$ 個ずつ入るように分ける。そして、各グループ内で大きいものから順に 4 つずつを取り出す。あとは、定理 5.1 と同様にして、

$$
\begin{aligned}
f(96n^2) &\le \sum_{k=0}^{n-1}(560n^2 - 4 \times 7k^2) \\
&= 560n^3 - 28\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{1652}{3}n^3 + 14n^2 - \frac{14}{3}n
\end{aligned}
$$

証明終

この $n\sqrt{n}$ の係数は、$0.58543\cdots$ となっている。これが現在得られている最良の上からの評価です。

6　あとがき

以上でこの記事は終わりです。もっと厳しい評価ができればよかったのですが、まだまだ緩い評価に終わってしまったのは少々残念です。ただ、最後にそこそこの結果を得られてよかったです。この問題は、僕が考え出した問題ではないので、他の人がもっと良い結果を出しているかもしれないです。知っている方がいれば、お教えください。

こういう問題の良いところは、誰でも問題の意味が分かることにあるのではないかと思います。実験を繰り返したりして、結果を出していく過程は楽しいものです。この記事を読んで、この楽しさを少しでも感じていただければ幸いです。

最後になりましたが、部誌を書くうえで助けてくれた部のみんな、そして、この記事を読んでくださった方々、ありがとうございました。

質問・感想があれば、youky_snow@hotmail.com までどうぞ。

7　参考文献

1. 「幾何学における未解決問題集」
   H.T. クロフト、K.J. ファルコナー、R.K. ガイ著　秋山仁訳
   シュプリンガー・フェアクラーク東京
2. 「中学生でも分かる大学生にも解けない数学問題集１」
   ピーター・フランクル著　日本評論社
3. 「LaTeX 2ε美文書作成入門」　奥村晴彦著　技術評論社