三角関数の m 乗和

中学3年1組18番　関 典史

1　はじめに

みなさん、本日はお忙しい中数研まで足を運んでくださってありがとうございます。
さてさて、この記事では、三角関数の m 乗和

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^m\frac{2k\pi}{n}, \sum_{k=0}^{n-1}\sin^m\frac{2k\pi}{n}(n, m \in \mathbb{N}, n \geq 3)$$

について考えます。これらを m, n の簡単な式で表すことが目標です。
前に $m = 1, 2$ の時を考えたことがあり、一般の m ではどうなっているのだろうと考えたことがこれをやろうと思ったきっかけです。

2　$m = 1, 2$ の時

まず $m = 1$ の時を考えてみましょう。
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}, \sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ を求めます。
これは、幾何的にイメージすると、単位円に内接する正 n 角形のそれぞれの頂点の x 座標（y 座標）の和です。
次が成り立ちます。

定理 2.1
$n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ の時

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$$

証明

複素数を用いる。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \\
&= \frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n-1}{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)-1} \left(\because \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq 1\right) \\
&= \frac{(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)-1}{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ より

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n},\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\in\mathbb{R}$ より

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

証明終

$m=2$ の時は次が成り立ちます。

定理 2.2

$n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ の時

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin^2\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{2}n$$

証明

$m=1$ の時と同様に、複素数を用いる。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{2k} \\
&= \frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{2n}-1}{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{2}-1}\left(\because\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2\neq 1\right) \\
&= \frac{(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)-1}{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{2}-1} \\
&= 0 \\
\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\cos^2\frac{2k\pi}{n}-\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)+i\cdot 2\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos^2\frac{2k\pi}{n}-\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)+i\cdot 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(2\cos^2\frac{2k\pi}{n}-1\right)+i\cdot 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)+i\cdot 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ より}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\cos^2\frac{2k\pi}{n}-1\right)+i\cdot 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)+i\cdot 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\cos^2\frac{2k\pi}{n}-1\right), \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right), 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\in\mathbb{R}$ より

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\cos^2\frac{2k\pi}{n}-1\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)=2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

よって

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}-n=0$$

$$n-2\sum_{k=0}^{n-1}\sin^2\frac{2k\pi}{n}=0$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{2k\pi}{n} = \frac{1}{2}n$$

証明終

この証明から、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$ も分かります。

3　一般の m について

さて、一般の m について考える時、まず $m = 1, 2$ の時と同様に、
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^m$ を考えます。

補題 3.1
$n, m \in \mathbb{N}, n \geq 3$ で、m が n の倍数でない時

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^m = 0$$

証明
m は n の倍数でないので、$\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^m = \cos m \cdot \frac{2\pi}{n} + i \sin m \cdot \frac{2\pi}{n} \neq 1$ であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^m &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{mk} \\
&= \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{mn} - 1}{\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^m - 1} \\
&= \frac{(\cos 2m\pi + i \sin 2m\pi) - 1}{\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^m - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

証明終

m が n の倍数である時は、$\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^m = \cos m \cdot \frac{2\pi}{n} + i \sin m \cdot \frac{2\pi}{n} = 1$ となり、上のようにはなりません。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^m = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

となります。

次に、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^m$ を $a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ の形にします。

ド・モアブルの定理を使って、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^m &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos m\cdot\frac{2k\pi}{n}+i\sin m\cdot\frac{2k\pi}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\cos m\cdot\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{k=0}^{n-1}\sin m\cdot\frac{2k\pi}{n}\text{となります。}\end{aligned}$$

これより、$\cos m\theta,\sin m\theta$ を $\cos\theta,\sin\theta$ の式で表すことを考えればよいということが分かります。

次が成り立ちます。

命題 3.2

任意の自然数 m に対して、$\cos m\theta,\sin m\theta$ はどちらも $\cos\theta,\sin\theta$ の整係数多項式で表せる。

証明

m に関する帰納法で簡単に示せる。

証明終

この命題は、次に挙げる 2 つの補題よりも緩いので、今後の議論には使えません。とりあえず $m=2,3,4$ の時を書いてみます。

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta,\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$$\cos 4\theta=\cos 2(2\theta)=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$

$$\sin 4\theta=\sin 2(2\theta)=2(2\cos^2\theta-1)(2\cos\theta\sin\theta)=8\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta$$

$\cos 3\theta$ は $\cos\theta$ の奇数次の項のみの 3 次式で、

$\sin 3\theta$ は $\sin\theta$ の奇数次の項のみの 3 次式で表されています。

一般に次が成り立ちます。

補題 3.3

m が奇数の時

$\cos m\theta$ は $\cos\theta$ の奇数次の項のみの m 次の整係数多項式で、

$\sin m\theta$ は $\sin\theta$ の奇数次の項のみの m 次の整係数多項式で表すことができる。

すなわち

$$\cos m\theta=a_N\cos^m\theta+a_{N-1}\cos^{m-2}\theta+\cdots+a_0\cos\theta$$

$$\sin m\theta = b_N \sin^m \theta + b_{N-1} \sin^{m-2} \theta + \cdots + b_0 \sin \theta$$

となるような

$$a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0 (a_N \neq 0, a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{Z})$$

$$b_N, b_{N-1}, \cdots, b_0 (b_N \neq 0, b_N, b_{N-1}, \cdots, b_0 \in \mathbb{Z})$$

が存在する。(ただし、$2N + 1 = m$)

証明

m に関する帰納法で示す。
$m = 1$ のとき、明らか。
$m = l (l:$ 奇数) のとき成り立つと仮定する。
$m = l + 2$ のときを考える。

$$\begin{aligned} \cos(l+2)\theta &= \cos(l\theta + 2\theta) \\ &= \cos l\theta \cos 2\theta - \sin l\theta \sin 2\theta \\ &= \cos l\theta (2\cos^2 \theta - 1) - \sin l\theta \cdot 2\cos\theta \sin\theta \\ &= 2\cos l\theta \cos^2 \theta - \cos l\theta - 2\sin l\theta \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

$\cos l\theta$ は $\cos\theta$ の奇数次の項のみの l 次の整係数多項式で表せるので、
$2\cos l\theta \cos^2 \theta$ は $\cos\theta$ の奇数次の項のみの $l+2$ 次の整係数多項式で表せる。
$\sin l\theta$ は $\sin\theta$ の奇数次の項のみの l 次の整係数多項式で表せるので、
$-2\sin l\theta \sin\theta$ は $\sin\theta$ の偶数次の項のみの $l+1$ 次の整係数多項式で表せる。
$-2\sin l\theta \sin\theta$ を $\sin\theta$ の偶数次の項のみの $l+1$ 次の整係数多項式で表し、
$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を用いて、
すべての項を $\sin^{2k} \theta = (\sin^2 \theta)^k = (1 - \cos^2 \theta)^k$ とすれば、
$-2\sin l\theta \sin\theta$ は $\cos\theta$ の偶数次の項のみの $l+1$ 次の整係数多項式で表せる。
よって、$-2\sin l\theta \sin\theta \cos\theta$ は $\cos\theta$ の奇数次の項のみの $l+2$ 次の整係数多項式で表せる。
以上より、$\cos(l+2)\theta$ は $\cos\theta$ の奇数次の項のみの $l+2$ 次の整係数多項式で表せる。
同様にして、$\sin(l+2)\theta$ が $\sin\theta$ の奇数次の項のみの $l+2$ 次の整係数多項式で表せることも示せる。
よって、任意の奇数 m について成り立つ。
また、帰納法により

$$a_N = 2^{m-1}, b_N = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1}$$

よって、$a_N \neq 0, b_N \neq 0$ なので、示された。

証明終

補題 3.4
m が偶数の時
$\cos m\theta$ は $\cos\theta$ の偶数次の項のみの m 次の整係数多項式で表せる。
すなわち

$$\cos m\theta = a_N \cos^m\theta + a_{N-1}\cos^{m-2}\theta + \cdots + a_1\cos^2\theta + a_0$$

となるような

$$a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0 (a_N \neq 0, a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{Z})$$

が存在する。(ただし、$2N = m$)

証明
$m = 2^n l (n \in \mathbb{N}, l:$ 奇数) とおける。
n に関する帰納法で示す。
(1)$n = 1$ のとき
l は奇数なので、補題 3.3 より、

$$\cos l\theta = a_N \cos^l\theta + a_{N-1}\cos^{l-2}\theta + \cdots + a_0\cos\theta (2N+1 = l, a_N \neq 0, a_N, \cdots, a_0 \in \mathbb{Z})$$

とおける。

$$\begin{aligned}\cos m\theta &= \cos 2l\theta \\ &= 2\sum_{\substack{i=0,\cdots,N \\ j=0,\cdots,N}} \left(a_i a_j \cos^{(2i+1)+(2j+1)}\theta\right) - 1 \\ &= 2\sum_{\substack{i=0,\cdots,N \\ j=0,\cdots,N}} \left(a_i a_j \cos^{2i+2j+2}\theta\right) - 1 \text{ より、}\end{aligned}$$

$\cos m\theta$ は $\cos\theta$ の偶数次の項のみの $2N + 2N + 2 = 2l = m$ 次の整係数多項式で表せる。
(2)$n = t$ のとき成り立つと仮定する。

$$\cos 2^t l\theta = a_N \cos^{2^t l}\theta + a_{N-1}\cos^{2^t l-2}\theta + \cdots + a_0 (l:\text{奇数}, 2N = 2^t l, a_N \neq 0, a_N, \cdots, a_0 \in \mathbb{Z})$$

とおける。
$n = t + 1$ のときを考える。

$m=2^{t+1}l$ なので

$$\begin{aligned}\cos m\theta &= \cos 2(2^t l\theta) \\ &= 2\cos^2 2^t l\theta - 1 \\ &= 2\sum_{\substack{i=0,\cdots,N \\ j=0,\cdots,N}} \left(a_i a_j \cos^{2i+2j}\theta\right) - 1\end{aligned}$$

よって、$\cos m\theta$ は $\cos\theta$ の偶数次の項のみの $2N+2N=2\cdot 2^t l=m$ 次の整係数多項式で表せる。(m 次の項の係数が 0 でないのは明らか)
(1)(2) より、任意の偶数 m に対して成り立つ。

証明終

補題 3.5
m が偶数の時
$\cos m\theta$ は $\sin\theta$ の偶数次の項のみの m 次の整係数多項式で表せる。
すなわち

$$\cos m\theta = a_N\sin^m\theta + a_{N-1}\sin^{m-2}\theta + \cdots + a_1\sin^2\theta + a_0$$

となるような

$$a_N,\cdots,a_0(a_N\neq 0, a_N,\cdots,a_0\in\mathbb{Z})$$

が存在する。(ただし、$2N=m$)

証明
補題 3.4 より

$$\cos m\theta = a_N\cos^m\theta + a_{N-1}\cos^{m-2}\theta + \cdots + a_1\cos^2\theta + a_0 (2N=m, a_N\neq 0, a_N,\cdots,a_0\in\mathbb{Z})$$

とおける。
この式において、$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ を用いて、
すべての項を、$\cos^{2j}\theta = (\cos^2\theta)^j = (1-\sin^2\theta)^j$ とすれば、
$\cos m\theta$ は $\sin\theta$ の偶数次の項のみの m 次の整係数多項式で表せる。

証明終

以上の補題より、以下の定理が得られます。

定理 3.6
n : 3 以上の自然数 , m : 奇数で、$n>m$ の時

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^m\frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sin^m\frac{2k\pi}{n} = 0$$

証明

m に関する帰納法で示す。

$m=1$ のとき、定理 2.1 より成り立つ。

$m \leq l(l:$ 奇数 $)$ なるすべての奇数 m について成り立つとする。

$m=l+2$ のときを考える。

$n>m$ なので、m は n の倍数でないから、補題 3.1 より、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos m \cdot \frac{2k\pi}{n} + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin m \cdot \frac{2k\pi}{n} = 0$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos m \cdot \frac{2k\pi}{n}, \sum_{k=0}^{n-1} \sin m \cdot \frac{2k\pi}{n} \in \mathbb{R}$ より

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos m \cdot \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin m \cdot \frac{2k\pi}{n} = 0$$

補題 3.3 より

$$\cos(l+2)\theta = a_N \cos^{l+2}\theta + a_{N-1}\cos^{l}\theta + \cdots + a_0 \cos\theta (2N+1 = l+2, a_N \neq 0, a_N, \cdots a_0 \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(l+2)\theta = b_N \sin^{l+2}\theta + b_{N-1}\sin^{l}\theta + \cdots + b_0 \sin\theta (2N+1 = l+2, b_N \neq 0, b_N, \cdots b_0 \in \mathbb{Z})$$

とおける。

よって

$$a_N \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{l+2} \frac{2k\pi}{n} + a_{N-1} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{l} \frac{2k\pi}{n} + \cdots + a_0 \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$$

$$b_N \sum_{k=0}^{n-1} \sin^{l+2} \frac{2k\pi}{n} + b_{N-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^{l} \frac{2k\pi}{n} + \cdots + b_0 \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$$

となる。

$n>l+2$ より、$l, l-2, \cdots, 1$ はどれも n の倍数でないので、

仮定より、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^{l} \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{l-2} \frac{2k\pi}{n} = \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$ で、また $a_N \neq 0$

だから

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^{l+2} \frac{2k\pi}{n} = 0$$

同様にして

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin^{l+2} \frac{2k\pi}{n} = 0$$

よって、$m=l+2$ のときも成り立つ。
よって帰納法より示された。

証明終

定理 3.7
$n,m\in\mathbb{N}, n\geq 3$ で、$n>m$ の時
m のみに依存する定数 A_m, B_m が存在し、

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^m\frac{2k\pi}{n}=A_m n,\quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin^m\frac{2k\pi}{n}=B_m n$$

となる。

証明
m が奇数のときは、定理 3.6 より、$A_m=B_m=0$ とすればよい。
m が偶数のときを、m に関する帰納法で示す。
(1)$m=2$ のとき
定理 2.2 より、$A_m=B_m=1/2$ とすればよい。
(2)$m\leq l(l:$ 偶数 $)$ なるすべての偶数 m について成り立つと仮定する。
$m=l+2$ のときを考える。
定理 3.6 の証明のときと同様にして

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos m\cdot\frac{2k\pi}{n}=0$$

補題 3.4 より

$$\cos(l+2)\theta=a_N\cos^{l+2}\theta+a_{N-1}\cos^l\theta+\cdots+a_1\cos^2\theta+a_0(2N=l+2, a_N\neq 0, a_N,\cdots,a_0\in\mathbb{Z})$$

とおける。
よって、

$$a_N\sum_{k=0}^{n-1}\cos^{l+2}\frac{2k\pi}{n}+a_{N-1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^l\frac{2k\pi}{n}+\cdots+a_1\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}+a_0 n=0$$

$n>l+2$ より、$l, l-2,\cdots,1$ はどれも n の倍数でないので、
仮定より、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos^l\frac{2k\pi}{n}, \sum_{k=0}^{n-1}\cos^{l-2}\frac{2k\pi}{n},\cdots,\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}$ がすべて n の定数 (m のみに依存) 倍で表せて、
また $a_N\neq 0$ だから、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos^{l+2}\frac{2k\pi}{n}$ も n の定数 (m のみに依存) 倍で表せる。

補題 3.5 より sin についても示せる。
よって、$m = l + 2$ のときも成り立つ。
(1)(2) より示された。

証明終

実は $A_m = B_m$ となっています。

定理 3.8
定理 3.7 の A_m, B_m について、$A_m = B_m$

証明
A_m, B_m は n に依らない定数なので、ある n について

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^m \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^m \frac{2k\pi}{n}$$

を示せばよい。
n を、m より大きい 4 の倍数とする。
$n = 4l (l \in \mathbb{N})$ とおく。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{4l-1} \cos^m \frac{2k\pi}{4l} &= \sum_{k=0}^{4l-1} \sin^m (\frac{2k\pi}{4l} + \frac{\pi}{2}) (\because \cos\theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) \\
&= \sum_{k=0}^{4l-1} \sin^m \frac{2(k+l)\pi}{4l} \\
&= \sum_{k=l}^{5l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} \\
&= \sum_{k=l}^{4l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} + \sum_{k=4l}^{5l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} \\
&= \sum_{k=l}^{4l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} + \sum_{k=4l}^{5l-1} \sin^m (\frac{2k\pi}{4l} - 2\pi) (\because \sin\theta = \sin(\theta - 2\pi)) \\
&= \sum_{k=l}^{4l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} + \sum_{k=4l}^{5l-1} \sin^m \frac{2(k-4l)\pi}{4l} \\
&= \sum_{k=l}^{4l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} + \sum_{k=0}^{l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l} \\
&= \sum_{k=0}^{4l-1} \sin^m \frac{2k\pi}{4l}
\end{aligned}$$

よって示された。

証明終

この証明は結構技巧的？

ここで、$m=2,4,6,8$ について、$A_m(=B_m)$ を求めてみます。
$m=2$ のとき
定理 2.2 より

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin^2\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{2}n$$

すなわち

$$A_2=B_2=\frac{1}{2}$$

$m=4$ のとき

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta-1\\ &= 2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\ &= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1 \text{ より}\end{aligned}$$

$$8\sum_{k=0}^{n-1}\cos^4\frac{2k\pi}{n}-8\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}+n=0$$

$$8\sum_{k=0}^{n-1}\cos^4\frac{2k\pi}{n}-8\cdot\frac{1}{2}n+n=0$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^4\frac{2k\pi}{n}=\frac{3}{8}n$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^4\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin^4\frac{2k\pi}{n}=\frac{3}{8}n$$

すなわち

$$A_4=B_4=\frac{3}{8}$$

$m=6$ のとき

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= 2\cos^2 3\theta-1\\ &= 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)^2-1\\ &= 32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1 \text{ より}\end{aligned}$$

$$32\sum_{k=0}^{n-1}\cos^6\frac{2k\pi}{n}-48\sum_{k=0}^{n-1}\cos^4\frac{2k\pi}{n}+18\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}-n=0$$

$$32\sum_{k=0}^{n-1}\cos^6\frac{2k\pi}{n}-48\cdot\frac{3}{8}n+18\cdot\frac{1}{2}n-n=0$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^6\frac{2k\pi}{n}=\frac{5}{16}n$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^6\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin^6\frac{2k\pi}{n}=\frac{5}{16}n$$

すなわち

$$A_6=B_6=\frac{5}{16}$$

$m=8$ のとき

$$\begin{aligned}\cos 8\theta &= 2\cos^2 4\theta-1\\ &= 2(8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1)^2-1\\ &= 128\cos^8\theta-256\cos^6\theta+160\cos^4\theta-32\cos^2\theta+1 \text{ より}\end{aligned}$$

$$128\sum_{k=0}^{n-1}\cos^8\frac{2k\pi}{n}-256\sum_{k=0}^{n-1}\cos^6\frac{2k\pi}{n}+160\sum_{k=0}^{n-1}\cos^4\frac{2k\pi}{n}-32\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k\pi}{n}+n=0$$

$$128\sum_{k=0}^{n-1}\cos^8\frac{2k\pi}{n}-256\cdot\frac{5}{16}n+160\cdot\frac{3}{8}n-32\cdot\frac{1}{2}n+n=0$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^8\frac{2k\pi}{n}=\frac{35}{128}n$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^8\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin^8\frac{2k\pi}{n}=\frac{35}{128}n$$

すなわち

$$A_8=B_8=\frac{35}{128}$$

$A_2=\frac{1}{2}, A_4=\frac{3}{8}, A_6=\frac{5}{16}, A_8=\frac{35}{128}$ が分かりましたが、規則性が発見できません。

A_m を m の簡単な式で表す方法はないのではないかと私は考えています。これは多分、$\cos m\theta$ を $\cos\theta$ で表す式が簡単に書けないからだと思います。
しかし、今 A_2, A_4, A_6, A_8 を求めたようにやっていくと、時間はかかりますが A_m は求まります。

4 チェビシェフの多項式

$\cos m\theta, \sin m\theta$ を $\cos\theta, \sin\theta$ の式で表すということについて、もう少し詳しく考えていきましょう。
このセクションは、この記事の本筋ではないので、証明は省略しています。
$m \in \mathbb{N}$ のとき

$$\cos m\theta = T_m(\cos\theta), \sin m\theta = U_m(\cos\theta)\sin\theta$$

となるような m 次整係数多項式 $T_m(x), m-1$ 次整係数多項式 $U_m(x)$ が存在する。
この $T_m(x), U_m(x)$ をチェビシェフの多項式という。
以下が成り立つ。
$1: T_m(x), U_m(x)$ ともに最高次数の項の係数は 2^{m-1} である。
$2: T'_m(x) = mU_m(x)$ が成り立つ。
$3: T_m(x) = 0$ の解は、$\cos\dfrac{1}{2m}\pi, \cos\dfrac{3}{2m}\pi, \cdots, \cos\dfrac{2m-1}{2m}\pi$ である。
また、$T'_m(x) = 0$ の解は、$\cos\dfrac{1}{m}\pi, \cos\dfrac{2}{m}\pi, \cdots, \cos\dfrac{m-1}{m}\pi$ である。
$4: T_m(x), U_m(x)$ はともに漸化式 $F_{m+2} - 2xF_{m+1} + F_m = 0$ を満たす。
先ほど「$\cos m\theta$ を $\cos\theta$ で表す式が簡単に書けない」と書きましたが、一応書けることは書けます。
$\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m$ の右辺を展開することにより

$$\cos m\theta = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{2k} \cos^{m-2k}\theta(\cos^2\theta - 1)^k$$

$$\sin m\theta = \sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]} \binom{m}{2k+1} \cos^{m-2k-1}\theta(\cos^2\theta - 1)^k \sin\theta$$

がわかります。これより

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{2k} x^{m-2k}(x^2-1)^k$$

$$U_m(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]} \binom{m}{2k+1} x^{m-2k-1}(x^2-1)^k$$

となります。

5 最後に

結局、A_m を m の簡単な式で表すことはできなかったので、当初の目標は達成されませんでした。3 の最後の方に書いたように、A_m を m の簡単な式で表すことはできないのではないかと私は思っていますが、もしかしたらあるのかもしれません。これが分かった方、質問や感想がある方は、是非 n_seki@wc4.so-net.ne.jp までメール下さい。

というわけで、充実した研究とは言えないかもしれませんが、m 乗和が n の定数倍で表せるというのが証明できたときは、結構うれしかったです。これは綺麗な結果だと思うんですが、どうでしょうか？

なお、この記事を TeX で打つのに
pLaTeX 2ε for WINDOWS Another Manual (乙部厳己、江口庄英 著 SOFT-BANK 社)
を参考にしました。
それと、TeX の打ち方を教えてくださった高 3 の矢野氏、高 2 の伊藤氏、高 1 の河口氏に感謝です。

最後まで読んでいただき、本当にありがとうございました！