正方形からなるブロックの $1 \times n$ による被覆*

高校２年３組　河口祐輝

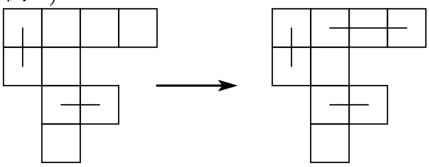
1　まえがき

本日は数学研究部にお越しくださり、有難うございます。

さて、ここでは先日数学研究部で作られた[1]（すでに存在している可能性は大いにありますが）ゲームについて書かせていただこうと思います。どんなゲームかと言いますと

(1) 紙などに、同じ大きさの正方形からなるブロックを描く。

(2) 二人 or 二チームで先手、後手を決め、交互に一回ずつ操作をすることで最終的に勝敗をつける。自分の番が来たとき、ブロックのうちまだ塗りつぶされていないマスから $1 \times n$(ただし $n \geq 2$) の形の長方形を (可能ならば) とり、塗りつぶすことができる。これを一回の操作とする。
例 1)



(3) 自分の番が来たときに、それ以上塗りつぶすことができない状態であれば、負けとなる。

というようなゲームです。本質的には「ニム」[2]と似たようなルールです。ちなみに、このようなへんてこな図形で遊ぶのもまた新鮮な感じがして面白いかもしれませんが、特に特殊な形にする必要性もあまりないので、実際にこ

* このゲームのルール上残ってしまう正方形もあるんですが、似たようなものなのでこのように言ってしまうことにします。

[1] thanks:伊藤佑樹氏

[2] 石取りゲーム。石が何列かに分かれて並んでいるのを、二人で交互にとっていき、最後に石を取ったほうが勝つ。ただし石を取るとき、あるひとつの列からのみ、一個以上の石を取る、という条件を満たさなければならない。

のゲームをするときは単純な正方形か長方形ではじめるといいでしょう。ただし、後述するように、正方形や長方形では禁じ手を設けないと自明な必勝手が存在してしまうので気をつけなくてはなりません。

さて、これから、ブロックの形に対してその塗りつぶし方を特徴付ける式を定義し、また、特殊な形に対しては先手必勝か後手必勝かを決定していきます。

2 定義たち

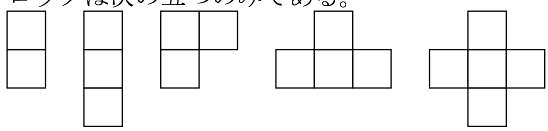
定義 1 ブロック
同じ大きさの (塗りつぶされていない) 正方形の集まり。正方形一つに対して、上下左右の辺に他の (塗りつぶされていない) 正方形が辺同士を重ねて一つついているか、ついていないかのいずれかである。(塗りつぶされていない) 正方形が一つも存在しない状態も、ブロックと呼ぶことにする。
すなわち、平面に頂点同士を重ねて敷き詰められた正方形全体の集合の部分集合を、ブロックと定義する。

定義 2 空ブロックと自明なブロック

(i) それ以上塗りつぶすことができない (つまり勝負がついてしまった後の) 状態のブロックを空ブロックと言い、K^0 と表す。
正方形同士が辺でつながっているものがあるとすればそのブロックは 1×2 で塗りつぶすことができるので、空ブロックは明らかに、正方形が一つも存在しない状態、もしくは一つまたは複数の正方形がお互いに辺で接せずに点在している状態のことである。

(ii) まだ塗りつぶすことができるブロックであって、どのように塗りつぶしても空ブロックになるようなものを自明なブロックと言う。

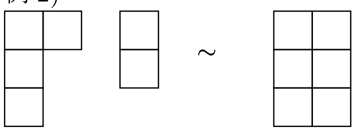
定理 1 バラバラになっていない、一かたまりのブロックのうち、自明なブロックは次の五つのみである。



証明 1 四個以下の正方形からなるブロックについては全て描き出せば分かる。
五個の正方形からなるブロックについて、そのブロックから正方形を一つ除いた時、それは四個の正方形からなるが、それが自明なブロックでなければもとのブロックは明らかに自明でない。よって、五個の正方形からなる自明なブロックは、四個の正方形からなるブロックに正方形を一つ付け加えた物である必要がある。すなわち、四個の正方形からなるブロックで自明であるものは四番目に挙げた一つだけであることから、これに正方形を一つ付け加えたものを描き出せば、右端に挙げたものが唯一自明である。
六個の正方形からなるブロックについて同様にすれば、右端に挙げたブロックにどのように正方形を付け加えても自明にならないことから、六個の正方形からなる自明なブロックは存在しない。
よって明らかに七個以上の正方形からなる自明なブロックも存在しない。

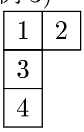
証明終

定義 3 ブロックの同型
「同じ」とみなせることを同型であるという。
すなわち、空ブロック同士は同型であると定義し、二つのブロック A, B があった時、A の任意の一回の塗りつぶし方について、B のある一回の塗りつぶし方が存在して、A の残ったブロックと B の残ったブロックが同型であるようにでき、かつ B の任意の塗りつぶし方に対しても同様である時、ブロック A と B は同型であるといい、$A \sim B$ と表す。
塗りつぶして残ったブロックに対しても同様にしていくことで空ブロックの同型に帰着できるので、このような定義が可能である。
例 2)



実際にやってみれば容易に確かめられる。

定義 4 ブロックの形を特徴付けるグラフ (樹形図)
まず、ブロックに対して、勝敗がつくまでのすべての塗りつぶし方を表現する以下のような樹形図を考える。
例 3)



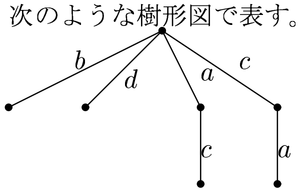
このようなブロックにおいて、一手での塗りつぶし方は

$$(1,2),(1,3),(3,4),(1,2,3)$$

の 4 通りあり、それぞれ a,b,c,d と名づける。この時、このブロックが空ブロックになるまでの塗りつぶされ方は

$$(a,c),(c,a),(b),(d)$$

の 4 通りある。ここで、この全ての塗りつぶし方を枝分かれの仕方を含めて次のような樹形図で表す。



ここで各点はその時々でのブロックの状態を表している。この図では、一手目で a,b,c,d の塗りつぶし方があり、b,d の塗りつぶし方をすればそれ以上塗りつぶせない状態となり、a の塗りつぶし方をすれば次に c の塗りつぶし方ができその後それ以上塗りつぶせない状態となり、c の塗りつぶし方をすれば次に a の塗りつぶし方ができその後それ以上塗りつぶせない状態となることが表されている。

ところでこの樹形図を見ると、(b) と (d)、(a,c) と (c,a) が、(枝分かれの仕方を見た時に) 区別する必要がないことが分かる。すなわち、b 以下の枝と d 以下の枝、a 以下の枝と d 以下の枝は同型であると言い、一つの点から複数の同型な枝が出ている場合それらをまとめて一つの枝で表現してよい。枝の形が違っていても、その下の階層で同型な枝をまとめることによって同じ形にできるならばそれらが同型であることに注意する。

一般に、あるブロックに対して二つの塗りつぶし方があって、それぞれの塗りつぶし方をして残ったブロックが同型であることと、その二つの塗りつぶし方以下の枝が同型であることが同値である。

このようにブロック K に対して、全ての塗りつぶし方について樹形図を描き、さらに同型な枝同士を全て縮約することによって得られた樹形図を $S(K)$ と定義する。

K に対して $S(K)$ は一意に定まり、さらに $S(K)$ が同一であるブロックは同型であり、区別する必要がないので、K と $S(K)$ を同一視して特に区別せずに扱うことにする。

定義 5 ブロックの値 ブロックを特徴付ける図を考えたが、さらにそれらを単純な式で表すことを考える。$S(K)$ に対する式を定め、それを K に対する式と考える。まず、空ブロック K^0 とその樹形図 $S(K^0)$ に対して

$$V_{K^0}(t) = V_{S(K^0)}(t) =< 1 >$$

と定義する。一般にブロック K の樹形図 $S(K)$ に対して m 本の枝 $S(K_c) \quad (c = 1, 2, \ldots, m)$ があるとすれば (K_c には同型なブロックであれば何をとっても良い)

$$V_K(t) = V_{S(K)}(t) =< \sum_{c=1}^{m} tV_{S(K_c)}(t) >$$

と定める。ただし、$V_K(t) = V_{K'}(t)$ ならば $tV_K(t) + tV_{K\prime}(t) = tV_K(t)$ とする。K_c に対しても同様にしていくことで空ブロックに帰着できるので、これによって $V_K(t) = V_{S(K)}(t)$ が定義される。
このように定義した $V_K(t)$ から容易に $S(K)$ を書くことができる。明らかに $V_{K_1}(t) = V_{K_2} \iff K_1 \sim K_2$ である。
また簡単のため

$$\begin{aligned} & \underbrace{t < t < t < \cdots < t < t}_{n \text{ 個}} >> \cdots >>> \\ = \quad & t^n \end{aligned}$$

と略記することにする。$t < t^n >= t^{n+1}$ である。
例 4)
例 2 に示した二つのブロックを (二つは同型なので)K と書けば

$$V_K(t) =< t < t^2 + t > +t^3 + t^2 >$$

積に関する分配法則が成立しないことに注意する。

補題 2 全てのブロックについて、先手か後手のうちいずれかが必勝である。必勝であるとは、相手がどのような塗りつぶし方をしても、自分が上手く塗りつぶすことによって必ず勝てることである。
証明は次の定義をして与える。

定義 6

$$W(S(K^0)) = 1$$
$$W(S(K)) = \prod_{c} \{1 - W(S(K_c))\}$$

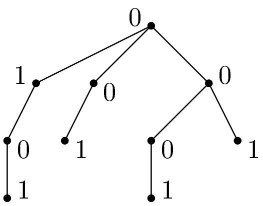
で定義される $W(S(K))$ を考える。これがブロック K が先手必勝か後手必勝かを表す関数となっている。
ブロック K に対して全ての $K_c(S(K)$ において枝を表す全てのブロック) において

$$W(S(K_c)) = \begin{cases} 0 & (K_c\text{が先手必勝のとき}) \\ 1 & (K_c\text{が後手必勝のとき}) \end{cases}$$

が成立するとする。
K が先手必勝であるとは、一手目で上手く塗りつぶすことによって後手必勝の形にできることであるから、$W(S(K_c)) = 1$ なる K_c が存在するすなわち $\prod_c \{1 - W(S(K_c)) = 0$ と同値である。
K が後手必勝であるとは、一手目でどのように塗りつぶしても必ず先手必勝の形になることであるから、$W(S(K_c)) = 1$ なる K_c が存在しないすなわち $\prod_c \{1 - W(S(K_c)) = 1$ と同値である。
K^0 が後手必勝であることから、K_c にも同様にしていくことで空ブロックの形に帰着できるので、次が成り立つ。

$$\begin{cases} K \text{ が先手必勝} & \Longleftrightarrow & W(S(K)) = 0 \\ K \text{ が後手必勝} & \Longleftrightarrow & W(S(K)) = 1 \end{cases}$$

$S(K)$ の図を描き、まず先端に 1 と書き、先端に近いほうから順に、各点にその一つ下の階層にある点にかかれた数字について同じことをしていけば、一番上の階層の点に書かれた数字が $W(S(K))$ となっている。明らかに $V_K(t)$ から $W(K)$ が求まる。
例 5)
例 2 の必勝手番を計算する。



図よりこれは先手必勝のブロックである。

証明 2 上記のことから K に対して必ず $W(S(K))$ が一つ定まるので、K は先手必勝か後手必勝かのいずれかである。

証明終

系 3 先手必勝であるブロック、後手必勝であるブロックは共に無限に存在する。

証明 3 後手必勝であるブロックが有限個だと仮定すると、十分大きな先手必勝であるブロックから一手塗りつぶした形が必ず先手必勝でなければならなくなり矛盾する。先手必勝であるブロックが有限個だと仮定すると、十分大きな後手必勝であるブロックに自明なブロックを付け加えたブロックが先手必勝であることから矛盾する。
具体的には、自明なブロックの奇数個の集まりが、先手必勝であり、偶数個の集まりが後手必勝である。

証明終

3 ブロックの直積

二つのブロックに対し、それらを、お互いの正方形が隣り合わないようにそのままあわせて新たに作ったブロックをその二つのブロックの直積[3]と呼ぶことにする。二つのブロック K_1, K_2 に対して $S(K_1)$ の枝が $\{S(K_{1,c_1})\}$、$S(K_2)$ の枝が $\{S(K_{2,c_2})\}$ であるとするとそれらの直積 $K = K_1 \times K_2$ について

$$V_K(t) = V_{S(K)}(t) = V_{K_1}(t) \times V_{K_2}(t)$$

と書き

$$V_{K_1}(t) \times V_{K_2}(t) =< \sum_{c_1} tV_{K_{1,c_1}}(t) \times V_{K_2}(t) + \sum_{c_2} tV_{K_{2,c_2}}(t) \times V_{K_1}(t) >$$

である。特に

$$< t > \times V_K(t) =< tV_K(t) + \sum_{c} < t > \times V_{K_c}(t) >$$

このことから、ブロック A_1, B_1, A_2, B_2 について

$$A_1 \sim B_1 \quad \text{かつ} \quad A_2 \sim B_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$$

4 特殊な形における必勝手番

これらの図や式を考えることで、描きだす事によってブロックを特徴付けることが容易になった。さて、次に具体的な場合について、より先手必勝か後手必勝かを定めやすくすることを考える。

[3]ブロックをそのまま足し合わせるという考え方から言えば直和のほうが正しいのですが、塗りつぶし方を考えると直積のほうがしっくりくると思ったのでまとめてこのように呼ぶことにします。

(1) 点対称なブロック

定理 4 点対称なブロックのうち

a. 次を満たすものは先手必勝である。

(i) 対称の中心がそのブロックに含まれる正方形の中心と重なり、かつ、その正方形がそのブロックに含まれる他の正方形と辺で接している。

(ii) 対称の中心がそのブロックに含まれる正方形の辺と重なる。

b. *a.* に当てはまらないものは後手必勝である。

証明 4 後手必勝のものを先に証明する。

b. そのようなブロックに含まれる任意の正方形についてその対称の位置にある正方形はそれ自身でなく (∵ もしそうでないとすると *a.* に含まれることになる)、そのものと対称の位置にある正方形は同時に塗りつぶすことができない (∵ その二つの正方形がある同一の縦か横の列になければ同時に塗りつぶすことはできない。同一の列にあると仮定すれば対称の中心もその列に存在するが、中心がそのブロックに含まれる正方形の中心にも辺上にもないことから、その二つの正方形の間に必ず隙間があることになり、同時に塗りつぶすことができない)。よって、先手がどのような塗りつぶし方をしても、後手は常にその塗りつぶし方と対称な塗りつぶし方をすることができるから、先手が塗りつぶすことができれば後手も塗りつぶすことができるので後手は負けることがないが、いつかは勝負がつくので後手が必ず勝つことができる。

a. *(i)* 先手は、対称の中心が中心と重なる正方形と、それに接する向かい合う正方形の三つの正方形を塗りつぶすことができる。そうして残ったブロックは *b.* の形になっている。よって、もとのブロックは先手必勝である。

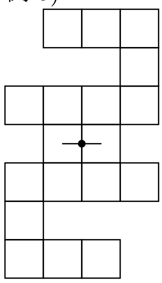
(ii) 先手は、対称の中心が辺と重なる向かい合う二つの正方形を塗りつぶすことができる。そうして残ったブロックは *b.* の形になっている。よって、もとのブロックは先手必勝である。

証明終

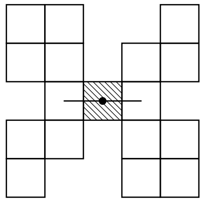
特に、$n \times m$ の長方形 $K^{n\times m}$ について

$$W(K^{n\times m}) = \begin{cases} 0 & (n \text{ と } m \text{ がいずれかが奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ と } m \text{ のいずれも偶数のとき}) \end{cases}$$

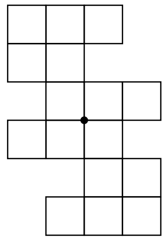
例 6)



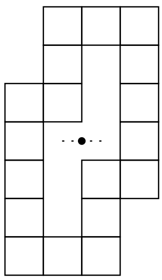
(先手必勝)



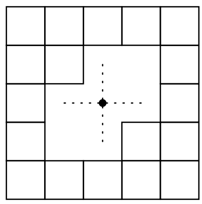
(先手必勝)



(後手必勝)



(後手必勝)



(後手必勝)

(2) 二つの同型なブロックの直積

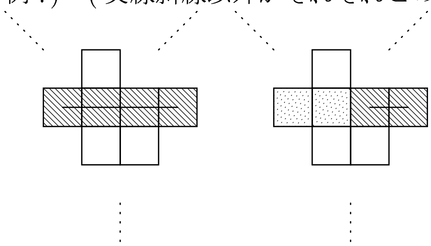
定理 5 二つの同型なブロックの直積は後手必勝である。また、ブロックが二つの同型なブロックのいくつかの組の直積と表せるとき、そのブロックは後手必勝である。

証明 5 定義より、先手が一方のブロックに対してどのような塗りつぶし方をしても、後手はもう一方のブロックを、二つのブロックが同型であるように塗りつぶすことができる。よって後手は負けないようにすることができるので後手必勝である。二つの同型なブロックのいくつかの組の直積は、それぞれの組からひとつずつとった直積とそれと同型なブロックの直積とみなせるので、同様に後手必勝である。

(3) 同型でないブロックの直積 K が複数のブロックの直積である場合、K を構成するばらばらなそれぞれのブロックの必勝手から K が先手必勝か後手必勝かを (全て書き出すよりは) 容易に定めることができる、という予想を立てる。一かたまりの、自明なブロックの n 個の直積と同型なブロックについて次のことを示しておく。

命題 6 あるブロックについて、縦か横に $1 \times n(n \geq 4)$ の長方形を一手で塗りつぶすことが可能である場合、そのブロックは後手必勝であるか、そうでない場合、うまく塗りつぶすことで先手必勝の形にすることができる。つまり、どのように塗りつぶしても後手必勝の形にしかできない先手必勝形ではない。

証明 6 そのようなブロック K が先手必勝であって、どのような塗りつぶし方をしても後手必勝にしかできない形であると仮定する。縦か横に $1 \times n(n \geq 4)$ の長方形が一手で塗りつぶすことが可能であるので、そのように塗りつぶす。もとのブロックが、そのようにして残ったブロック K' も後手必勝の形である。
そこで、その塗りつぶし方をするとき時に塗りつぶす長方形の片方の端を固定し、もう片方の端を正方形 2 つ分短くした塗りつぶし方を考える ($n \geq 4$ であることからこのような塗りつぶし方が可能である)。
そのように短くした塗りつぶしかたによって残ったブロック K'' は先手必勝である。なぜならば、K'' は K' に 1×2 の自明なブロックを付け加えたものになっているから、その 1×2 の長方形を塗りつぶせば仮定より後手必勝にできるからである。よって矛盾するのでこの主張は正しい。
例 7)　(実線斜線以外がそれぞれこの例における K', K'' である。)



実線斜線以外がそれぞれ K', K''

証明終

これよりさらに次のことが導かれる。

系 7 ひとつ以上の自明なブロックの直積と同型なブロックは、1×2 または 1×3 の塗りつぶし方しかできない。

証明 7 一かたまりのブロックについて示せば十分である。自明なブロックの直積と同型なブロックが、先手必勝であるとすれば後手必勝にしかできない先手必勝形である。よって命題 6 より $1 \times n(n \geq 4)$ の塗りつぶし方ができない。後手必勝であるとすれば、どのような塗りつぶし方を

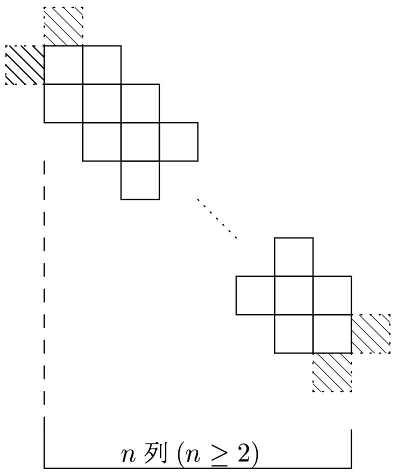
しても、後手必勝にしかできない先手必勝になるが、$1 \times n(n \geq 4)$ で塗りつぶすことが可能であると仮定したとき、$1 \times n(n \geq 4)$ の形でそれに何もついていないか、またはいくらかの正方形が独立してついているだけの形であるとすれば、その形は先手必勝であるから、$1 \times n(n \geq 4)$ の長方形に、その長方形に含まれる正方形を塗りつぶさずに塗りつぶすことができるいくつかの正方形がついているとして良く、そのときその塗りつぶし方をして残ったブロックは命題 6 より先手必勝にできる先手必勝形であることから、$1 \times n(n \geq 4)$ で塗りつぶされるならばそれは自明なブロックの直積と同型でない。

証明終

系 8 次の形のブロックは n 個の自明なブロックの直積と同型である。(系 7 の例である)

(i) 定理 1 で挙げた五つのブロック $(n = 1)$

(ii)



斜線のある正方形はあってもなくても良い。$n(\geq 2)$ の形は回転、裏返しで同じとみなせるものをひとつと数えれば 7 種類ある。

証明 8 $n = 1$ のとき成り立つ。$n \leq k$ で成り立つとすると、$n = k + 1$ の形をどのように塗りつぶしても、残るブロックは (空ブロックを無視すれば)$n = k$ の形か、$n = a$ の形と $n = b$ の形 $(a + b = k)$ の直積となっていることから、$n = k + 1$ の形は n 個の自明なブロックの直積と同型である。

証明終

このような例を他にも考えることができるが、一かたまりのブロックであって自明なブロックの直積と同型なものは無限に存在するものの、さほど多くはないことが分かる。

予想　自明なブロックの直積と同型でないブロックは、うまく塗りつぶすことによって必ず先手必勝の形にすることができる。
$1 \times n (n \geq 4)$ で塗りつぶすことが可能である場合はこれは系 7 と同じであるから、1×2 または 1×3 の塗りつぶし方しかできないブロックについてこれが成り立つことを言う必要がある。

最後に一般に、自明なブロックの直積と同型であるか、先手必勝か、後手必勝かが分かっているいくらかのブロックの直積についてその必勝手を簡単に表して終わりたかったが、この予想が正しかったとしても、それは容易には定まらないようである。実際には、どのように塗りつぶしても後手必勝になる形になるまでの枝分かれの仕方を表現せねばならないようであるが、筆者の力不足か、この問題が難解であるかによって残念ながらこれを示さずに終わっておく。

5　あとがき

ここまでこのような取り留めのない、理屈っぽい議論にお付き合いいただき、有難うございます。ページ稼ぎも兼ねて例を多く挙げてみましたが、いかがでしたでしょうか。それでも定義しにくいものが多くあったので分かりづらかったことと思います。

さてこのゲームですが、新学期に部室へ行ったときに四人の数研部員がおもむろに黒板でプレイしだしたのをパクらせてもらいました (いくつかの記号は結び目理論から拝借しました)。実際にやってみると[4]これがなかなか難しく、「あほあほあほ選択自由度 2〜」[5]とか叫びながら皆で研究したのをこの記事のヒントにしました。皆さんも一度プレイしてみてはいかがでしょうか。

初めに書きましたように、定義や証明の表現が難しく、私の力不足から言い方が不十分な点があったり、本質的に間違った点があったりするかもしれません。あるような気がします。なので、もしおかしな点がございましたら
kawaguchi_yuki_n@hotmail.com
までメールをお願いします。質問や感想もお待ちしております。

それでは機会があればまた来年文化祭でお目にかかりましょう。

[4]筆者はまだこのゲームを観戦しかしたことがありません
[5]具体的な後手必勝形の一つのことです