四色問題

M3-4-14 佐藤 龍太郎

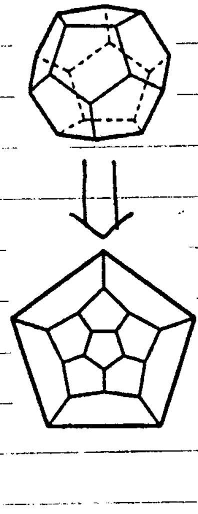
1. はじめに

これを読んでいる方々には、すでにこの問題について知っている人も多いと思いますが、どういう問題であるかを書くことにします。
「四色あれば、どんな地図でも隣り合う国々が違う色になるように塗り分けることができるのか？」
これが四色問題です。それでは、これから、四色問題についていろいろ書いていこうと思います。

2. 六色定理

(1)「隣国は五つ以下」定理

空間内の1点から、平面上へ多面体を射影することができ、どんな多面体でも、この方法で平面上に写し取ることができる。右図は、正十二面体と、その射影である。



ここで、オイラーの多面体公式
(面の数)−(辺の数)+(頂点の数)=2
を利用すると、
外部領域を含めるならば、
(国の数)−(境界線の数)+(交点の数)=2
となり、国の数をF、境界線の数をE、交点の数をVと表すことにすると、
$F-E+V=2$
となる。以下では、これをオイラーの公式と呼ぶことにする。

さて、ようやく「隣国は五つ以下」定理である。

「どんな地図にも、五個以下の隣国しか持たない国が
少なくとも一つ含まれている。」

(証明)
会している境界線が二本しかない交点は、除去しても隣国の数に
影響を及ぼさないので、各交点には少なくとも三本の境界線がある。
ゆえに、$E \geqq \frac{3}{2}V$であり、$V \leqq \frac{2}{3}E$である。
ここで、どの国も少なくとも六つの隣国に囲まれているとする。
すると、$E \geqq 3F$となり、$F \leqq \frac{1}{3}E$である。
ここで、$F \leqq \frac{1}{3}E$と$V \leqq \frac{2}{3}E$をオイラーの公式に代入すると、
$F-E+V \leqq \frac{1}{3}E-E+\frac{2}{3}E=0$ となる。
しかし、オイラーの公式によると、$F-E+V=2$なので、
これは矛盾する。よって仮定が間違っているので、
五個以下の隣国しか持たない国が少なくとも一つあることになる。

(2) 数え上げの公式
ここでは、各交点での境界線の数がちょうど三本になっている
三枝地図のみを考えることにする。
地図上に、2つの隣国を持つ国(二辺国)がC_2個、3つの隣国を
持つ国(三辺国)がC_3個、4つの隣国を持つ国(四辺国)がC_4個
……と描かれているとする。
このとき、国の総数Fは、これらの総和になり、
$F=C_2+C_3+C_4+C_5+C_6+C_7+\cdots\cdots$ ―①
次に、$E=C_2+\frac{3}{2}C_3+2C_4+\frac{5}{2}C_5+3C_6+\frac{7}{2}C_7+\cdots\cdots$ ―②
また、$V=\frac{2}{3}C_2+C_3+\frac{4}{3}C_4+\frac{5}{3}C_5+2C_6+\frac{7}{3}C_7+\cdots\cdots$ ―③
ここで、①〜③をオイラーの公式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
2 &= F-E+V \\
&= C_2+C_3+C_4+C_5+C_6+C_7+\cdots\cdots \\
&\quad -\left(C_2+\tfrac{3}{2}C_3+2C_4+\tfrac{5}{2}C_5+3C_6+\tfrac{7}{2}C_7+\cdots\cdots\right) \\
&\quad +\left(\tfrac{2}{3}C_2+C_3+\tfrac{4}{3}C_4+\tfrac{5}{3}C_5+2C_6+\tfrac{7}{3}C_7+\cdots\cdots\right)
\end{aligned}
$$

$$= C_2\left(1-1+\tfrac{2}{3}\right)+C_3\left(1-\tfrac{3}{2}+1\right)+C_4\left(1-2+\tfrac{4}{3}\right)+C_5\left(1-\tfrac{5}{2}+\tfrac{5}{3}\right)$$
$$+C_6(1-3+2)+C_7\left(1-\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{3}\right)+\cdots\cdots$$
$$= \tfrac{2}{3}C_2+\tfrac{1}{2}C_3+\tfrac{1}{3}C_4+\tfrac{1}{6}C_5+0C_6-\tfrac{1}{6}C_7-\cdots\cdots$$

全体を6倍して、

$$4C_2+3C_3+2C_4+C_5-C_7-2C_8\cdots\cdots=12$$

これを「三枝地図の数え上げの公式」と呼ぶ。

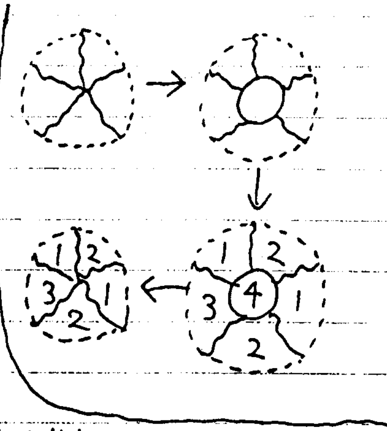
数え上げの公式では、C_2、C_3、C_4、C_5のすべてが0になると、左辺から正の項が消えて、負の値になるので、C_2、C_3、C_4、C_5の少なくとも一つが正の数で、地図上に二辺国、三辺国、四辺国、五辺国のうち少なくとも1つがなければならない。これは、三枝地図における「隣国は五つ以下」定理のもう一つの証明になっている。

(3) 六色定理

六色定理を証明する前に、四色定理を証明するにあたってはすべての交点でちょうど三個の国が集まっている三枝地図だけを考えてよいことを示す。

(証明)

四個以上の国が集まっている交点を持つ地図(右図)を考える。この交点の上に丸い小さな「パッチ」を当てて、すべての交点にちょうど三個の国が集まっている新しい地図を作り、この新しい地図が四色で塗り分けられるなら、パッチを小さくして点にすれば、もとの地図も四色で塗り分けられる。よって三枝地図のみを考えればよい。



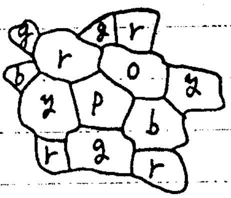
No.

六色定理
「六色あれば、どんな地図でも隣り合う国々が違う
色になるように塗り分けることができる。」
(証明)
七色以上を必要とする地図があるとする。その中には、最も少ない
国からなる最小反例があるはずである。この地図は六色では
塗れないが、それより少ない国からなる地図はすべて六色で塗
り分けられる。ここで、「隣国は五つ以下」定理を利用し、五国
以下の隣国しか持たない国をAとする。A国から境界線を一本
はずして隣国のどれかと融合させると、国の数が減り、仮定
より、六色で塗り分けられる地図になる。ここで、A国を復元
する。利用できる色は六色で、A国の隣国を塗るためには五色
あれば足りるのだから、A国を塗るための色は残っている。
ゆえに、最小反例を六色で塗り分けられることになり、これは
仮定に反している。よって最小反例が存在しないことが証明され、
六色定理が証明された。

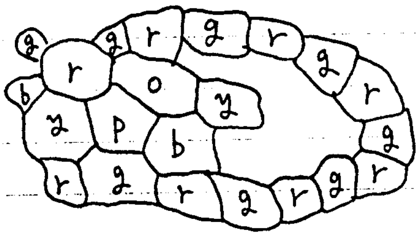
3.五色定理
「五色あれば、どんな地図でも隣り合う国々が違う
色になるように塗り分けることができる。」
(証明)六色以上を必要とする地図があるとする。その中には、最も少ない
国からなる最小反例があるはずである。この地図は五色では
塗れないが、それより少ない国からなる地図はすべて五色で塗
り分けられる。「隣国は五つ以下」定理より、五個以下の隣国しか
持たない国が存在する。二辺国を含む場合、二辺国から境界線
を一本はずして隣国のどれかと融合させると、国の数が減り、
仮定より、五色で塗り分けられる地図になる。ここで二辺国を
復元する。利用できる色は五色で、二辺国の隣国を塗る
ためには二色で足りるので、二辺国を塗るための色は残って
いる。ゆえに、最小反例を五色で塗り分けられることになり、
これは仮定に反している。

NAKABAYASHI・A罫

同様に、三辺国、四辺国を含む場合、三辺国、四辺国を塗るための色は残り、仮定に反する。
最小反例が五辺国を含む場合も、五辺国の境界線を1本はずして隣国のどれかと融合させ、国の数を1つ減らす。仮定により、この新しい地図は五色で塗り分けられる。塗り分けができたら、五辺国を復元する。しかし、今回は、五辺国の五つの隣国を塗り分けるために五色すべてが使われている可能性がある。
ここで、ケンプ鎖の論証という方法を用いる。この方法では、中心の国を取り囲む国々の中から隣り合っていない二色(例えば赤と緑)を選び、以後では、この二色で塗られた国だけを考える。
ここで、二つの赤ー緑部分が離れているか、つながっているかによって、二つのケースが考えられる。(下図)



ケース1



ケース2

ケース1のとき、
Pから見て上の赤い国からはじまる赤ー緑部分は、Pの下の緑の国からはじまる赤ー緑部分とはつながっていない。ゆえに、Pの上方にある赤ー緑部分の色を入れ替えても、下方にある赤ー緑部分の塗り分けには関係がない。このとき、五辺国Pは、緑、青、黄、橙の四色だけに囲まれることになるので、Pは赤で塗ることができる。よって地図の塗り分けは完成する。
ケース2のとき、
Pの上にある赤ー緑部分は、Pの下にある赤ー緑部分とつながっているので、色を入れ替えても意味がない。Pの右にある青ー黄部分と左にある黄ー青部分とはつながっていないので、右にある青ー黄部分

の色を入れ替えても、Pの左にある黄ー青部分の塗り分けとは関係はない。このとき、五辺国Pは、黄、赤、緑、橙の四色だけで囲まれることになるので、Pは青で塗ることができ、ケース2の塗り分けも完成する。以上より、どの場合も仮定に反するので、仮定が間違っていることになり、五色定理が証明された。

4、四色定理

(1) 不可避集合と可約配置

「隣国は五つ以下」定理により、あらゆる三枝地図を描くときには、二辺国と三辺国と四辺国と五辺国のうちどれかを少なくとも一つは利用しなければならない。このように、地図を描く上で避けることのできない形の集合を「不可避集合」と呼ぶ。
「可約配置」とは、三枝地図における最小反例には含まれない国々の配置のことで、二辺国、三辺国、四辺国はすべて可約配置である。
ある地図が可約配置を含んでいるとき、これを除いた残りの地図が四色で塗り分けられるなら、必要に応じて塗り直しをすることで、四色の塗り分けを地図全体に拡張することができる。よって、不可避集合がすべて可約配置であるなら、必要である配置が、最小反例には含まれないことになり、最小反例が存在できないことになる。
不可避集合がすべて可約配置であることの証明は、コンピューターを1000時間以上使うことでされて、証明の論文は約1000ページに達する。したがってここにそれを書くことはできない。

(2) 境界線の塗り分け

「各交点でちょうど三本の境界線が会している地図では、同じ色の境界線どうしが端点を共有しないように境界線を塗り分けるには、三色あれば足りる。」

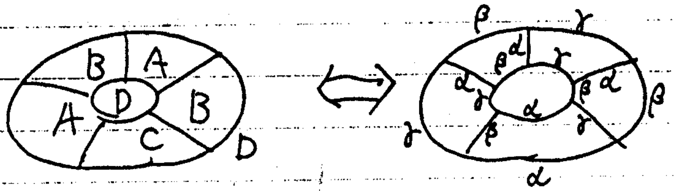
例として、地図上の国々がA、B、C、Dの四色で塗り分けられてる三枝地図を考える。

No.

このとき、次のようにして、地図中の境界線をα、β、γの三色で塗り分けることができる。

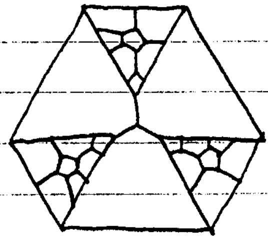
A色の国とB色の国のペア、またはC色の国とD色の国のペアの間の境界線をα色で塗り、
A色の国とC色の国のペア、またはB色の国とD色の国のペアの間の境界線をβ色で塗り、
A色の国とD色の国のペア、またはB色の国とC色の国のペアの間の境界線をγ色で塗る。

この操作を絵で説明すると、下図のようになる。



この操作は必ず逆向きにも進められる。ここに三枝地図があり、各交点で三色すべての境界線が会するように境界線が塗り分けられてるとする。任意の国を選んで、Aの色を塗ると、あとは上述の手順により、この国に隣接する国々の色が分かる。例えば、もとの国と、その隣りの国との間にある境界線がβの色で塗られているなら、隣りの国はCの色で塗られなければならない。この作業を続けていくと、地図中のすべての国に色を塗ることができる。
また、三枝の多面体に閉路があれば、その辺は三色で塗り分けられるという事実がある。例えば、閉路を構成する辺を赤と緑で交互に塗って、残りの辺を青で塗ればよいのである。
よって、すべての三枝の多面体に閉路があれば、それは四色で塗り分けられることになり、四色定理が証明される。

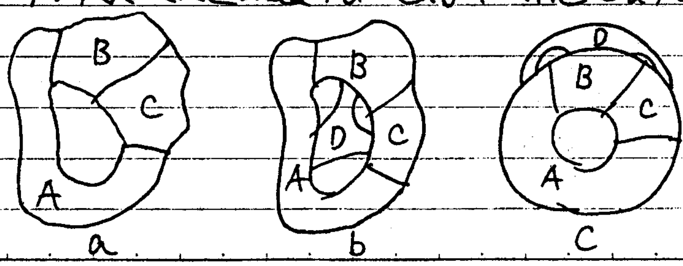
しかし、これには、右図のような
反例がある。



5、四色問題の類題
(1) 五人の王子の問題

「むかしむかし、インドに大きな国がありました。
この国の王様が亡くなるときに、五人の王子に言いました。
わたしが死んだら、王国は五人で分けなさい。
ただし、どの領土も、他の四人の領土と境界線を
共有するように分けなければならない。
さて、王国はどのように分ければよいだろうか。」

この問題に答えがない理由を直観に理解するのは簡単だ。
年上の三人の王子の領土をそれぞれA、B、Cと呼ぶとする。
下の図aに示すように、三つの領域は互いに境界線を
共有していなければならない。このとき、四番目の王子の
領土Dは領土A、B、Cに完全に囲まれているか完全に
外側にあるかのどちらかでなければならない。二つの
状況は、それぞれ、下図のbとcに相当する。各状況において、
他の領土のすべてと共通の境界線を持つように五番目の
王子の領土Eを配置することは不可能である。



a　　b　　c

(2) ドーナツの上の地図

トーラス(ドーナツ)上の地図に関するオイラーの公式
(国の数)−(境界線の数)+(交点の数)=0
つまり、$F-E+V=0$
これは、k個の穴が貫通してる多面体では、
$F-E+V=2-2k$ となることに由来している。

トーラス上の地図に関する隣国は六つ以下定理

「トーラス上のどんな地図にも、六個以下の隣国しか持たない国が少なくとも1つある。」
(証明)
各交点には少なくとも三本の境界線が会していると仮定してよいので、$V \leqq \frac{2}{3}E$
ここで、各国は少なくとも7つの隣国に囲まれていると仮定する。
すると、$F \leqq \frac{2}{7}E$ となる。
これらをトーラス上の地図に関するオイラーの公式に代入すると、$F-E+V \leqq \frac{2}{7}E-E+\frac{2}{3}E=-\frac{1}{21}E$ となる。
オイラーの公式によると、$F-E+V=0$ なので、
これは矛盾。よって、地図中には六個以下の隣国しか持たない国がすくなくとも1つあることが証明された。

これを利用すると、六色定理と同様にして、
トーラス上のどんな地図でも七色で塗り分けられることが証明できる。

後書き

字や文が読みにくく、図がきたなかったかもしれませんが、
ここまで読んでくださって本当にありがとうございます。
内容はそれほど難しくなかったと思いますが、
どうでしょうか。
これを書くのに、
「四色問題」…ロビン・ウィルソン著：新潮社
を参考にしました。
最後だけ読んでくださった方もどうもありがとうございました。