三角関数の m 乗和

高校1年1組24番　関 典史

1　はじめに

「三角関数の m 乗和」というタイトルの記事を去年の部誌にも載せました。なぜ今年も同じタイトルの記事を書いたかというと、去年未解決だったことがめでたく解決したからです。

2　解決

去年の記事で次の定理を示しました。

定理 2.1
$n, m \in \mathbb{N}, n \geq 3$ で、$n > m$ の時
m のみに依存する定数 A_m が存在し、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^m \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^m \frac{2k\pi}{n} = A_m n$$

となる。

証明は去年の部誌を見てください。去年の部誌なんか持ってないという方も、数研のホームページ (http://f59.aaa.livedoor.jp/~nadamath/) で見ることができます。
去年は、m が奇数のとき $A_m = 0$ であることは示せたのですが、m が偶数のときについては A_m を m の式で表すことができず、$A_2 = \frac{1}{2}, A_4 = \frac{3}{8}, A_6 = \frac{5}{16}, A_8 = \frac{35}{128}$ を求めただけでした。
そして月日は流れ、ある時、$A_2 = \frac{1}{2}, A_4 = \frac{3}{8}, A_6 = \frac{5}{16}, A_8 = \frac{35}{128}$ を見た高2の吉田氏（通称 yos）が、規則性を発見して次のような予想を立ててくれました。（私は A_2, A_4, A_6, A_8 を求めたときの方法を一般化できないかということばかり考えていましたが、$\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}$ という数列において隣り合う数の比をとるとすんなり規則が見えるんですねぇ。）

予想 2.2
m が偶数であるとき

$$A_m = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

実はこれは成り立ちます。証明に入る前に補題を 2 つ用意します。

補題 2.3

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$

証明
定積分の定義式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x\right)$ に $a = 0, b = 1$ を代入すると得られる。

証明終

これは高校数学でよく出てくる区分求積法というやつです。

補題 2.4
$m(\geq 0)$ が偶数であるとき

$$\int_0^{2\pi} \cos^m x \; dx = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

が成り立つ。

証明

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^m x\ dx = P_m$ とおくと

$$\begin{aligned}
P_m &= \int_0^{2\pi} \cos^m x\ dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^{m-1} x(\sin x)'\ dx \\
&= \left[\cos^{m-1} x \sin x\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (m-1)\cos^{m-2} x(-\sin x)\sin x\ dx \\
&= -(m-1)\int_0^{2\pi} \cos^{m-2} x(\cos^2 -1)\ dx \\
&= -(m-1)\left(\int_0^{2\pi} \cos^m x\ dx - \int_0^{2\pi} \cos^{m-2} x\ dx\right) \\
&= -(m-1)P_m + (m-1)P_{m-2}
\end{aligned}$$

より、$P_m = \dfrac{m-1}{m} P_{m-2}$

また、$P_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$

よって $P_m = \dfrac{m-1}{m} \cdot \dfrac{m-3}{m-2} \cdot \dfrac{m-5}{m-4} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi$ である。

証明終

さてそれでは先ほどの予想が実際に成り立つことを証明しましょう。

定理 2.5

m が偶数であるとき

$$A_m = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

証明

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^m \frac{2k\pi}{n} = A_m n$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^m \frac{2k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^m \frac{2k\pi}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} A_m \\
&= A_m
\end{aligned}$$

であり、また補題 2.3, 2.4 より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^m\frac{2k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n} &= \int_0^1 \cos^m(2\pi x)\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m t\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot 2\pi \\ &= \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。
よって $A_m = \dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{m-3}{m-2}\cdot\dfrac{m-5}{m-4}\cdots\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。

証明終

これで去年の目標が達成されました。yos の予想の形を見て、$\cos^m x$ の定積分もこんな形だったな〜と思ってたらこの証明を思いつきました。yos に感謝です。

お読みいただきありがとうございました！