正多胞体について

木村 冬馬

平成 21 年 8 月 18 日

0 はじめに

本稿では正多胞体の可能性、またその体積・表面積を求めたいと思います。

1 正多胞体とは?

2 次元の正多角形 1 種類をいくつか使って 3 次元の正多面体を作るように、$(n-1)$ 次元正多胞体を”胞”[1] とし、2 つの胞を $(n-2)$ 次元正多胞体[2] を境界としてくっつけていってできる閉じた図形のことである。ただし
(i) 胞は全て合同。
(ii) $(n-3)$ 次元正多胞体[3] に集まっている $(n-1)$ 次元正多胞体の数はどこも同じ。
の 2 つの条件を満たさなければならない。以下、正多胞体の 1 辺は 1 とする。

2 2 次元正 m 角形

$m \geq 2$ では 2 次元的に広がらないから、 $m \leq 3$ 。図 1 のように m 個の 2 等辺 3 角形に分割すると 1 つの面積は

$$\frac{1}{4}\cot\frac{\pi}{m}$$

となるので正 m 角形の面積は

$$\frac{m}{4}\cot\frac{\pi}{m}$$

[1] 3 次元なら”面”にあたる
[2] 3 次元なら”辺”にあたる
[3] 3 次元なら”頂点”にあたる

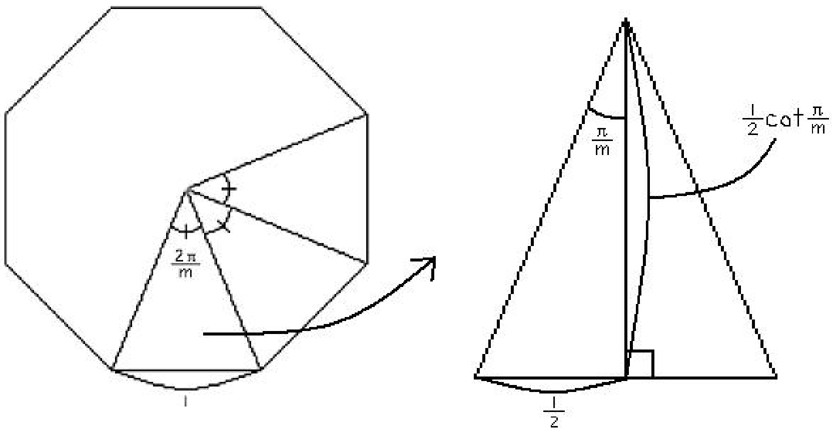

図 1: 正 m 角形を分割する

また周の長さは

$$1 \cdot m = m$$

内角は

$$2\left(\left(\pi - \frac{2\pi}{m}\right) \div 2\right) = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\pi$$

3　3 次元正 m 面体

1 つの頂点に正 p 角形が q 個集まっていたとすると

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{2}{p}\right)\pi \cdot q < 2\pi & \text{(集まった角の合計が }2\pi\text{未満でないと} \\ & \text{3 次元的に広がらないから)} \\ q > 2 & (q \leq 2 \text{ では 3 次元的に広がらないから)} \\ p > 2 & \text{(3.参照)} \end{cases}$$

最初の条件は

$$(p-2)(q-2) < 4$$

と変形できるから結局

$$(p, q) = (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$$

(1) $(p, q) = (3,3)$
このとき

$$m = 4$$

となり、頂点は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

と

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

の置換 3 つの合計 4 つ。[4]さて、図 2 のように 1 辺 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の立方体の中に正 4 面体を置くとその体積は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \div 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \div 3 \cdot 4 = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

また、表面積は 1 辺 1 の正 3 角形 4 つ分だから

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \div 2 \cdot 4 = \sqrt{3}$$

正 4 面体の 2 面角 (2 つの面がなす角、図 2 の”?”) は余弦定理より

$$\arccos \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \arccos \frac{1}{3} = 70.5287793655\ldots^\circ$$

(2) $(p, q) = (3,4)$
このとき

$$m = 8$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$$

[4]ここで注釈しておくが、正多胞体の頂点の座標は、その構成胞 (1 次元下がる) の頂点の位置関係から帰納的に求められるべきものであるが、本稿では紙幅の都合上求め方は省略する。また、無論座標は平行移動、回転移動してよいが、本稿では重心が原点に来て、できるだけ対称性が分かりやすいようなものを紹介している。

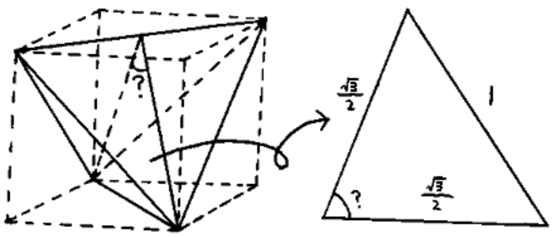

図 2: 正 4 面体の断面図

の置換 6 つ。体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\div 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\div 3\cdot 8=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

表面積は 1 辺 1 の正 3 角形 8 つ分だから

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8=2\sqrt{3}$$

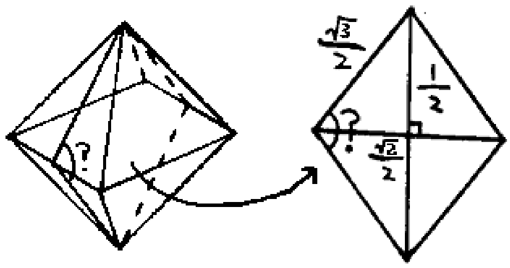

図 3: 正 8 面体の断面図

2 面角は図 3 より

$$2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \quad = \quad \arccos\left(2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right)$$

$$= \quad \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109.4712206344\ldots^\circ$$

となる。[5]
(3) $(p, q) = (3, 5)$
このとき

$$m = 20$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0\right)$$

の [6] 偶置換 [7] 12 個。図 4 より体積は

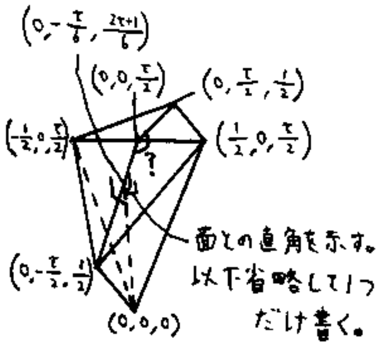

図 4: 正 20 面体の一部

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{\tau^2 + 4\tau^2 + 4\tau + 1}{36}} \div 3 \cdot 20 = \frac{5}{12}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \frac{5}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12}$$

表面積は 1 辺 1 の正 3 角形 20 枚分だから

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 20 = 5\sqrt{3}$$

2 面角を求めるには内積を使う。今は

$$\left(0, 0, \frac{\tau}{2}\right)$$

[5] 2 倍角の公式を利用

[6] τ : 黄金比。$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033\ldots$

[7] 2 つを交換することを偶数回行った置換。

から

$$\left(0, \pm\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

への vector を考えればよい。vector は

$$\left(0, \pm\frac{\tau}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$$

だから 2 面角は結局

$$\arccos\frac{-\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{3}{4}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 138.1896851042\ldots^\circ$$

(4) $(p, q) = (4, 3)$
このとき

$$m = 6$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

の 8 個。体積は

$$1^3 = 1$$

表面積は

$$1 \cdot 6 = 6$$

2 面角は無論

$$90^\circ$$

(5) $(p, q) = (5, 3)$
このとき

$$m = 12$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}\right)$$

と

$$\left(0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}\right)$$

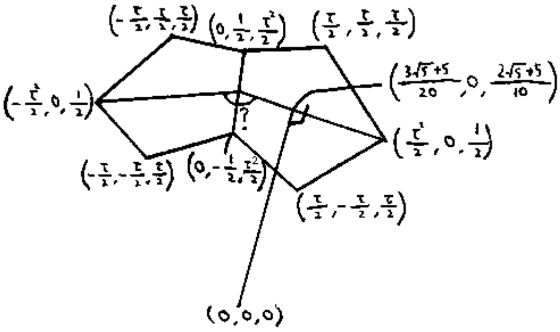

図 5: 正 12 面体の一部

の偶置換 12 個の合計 20 個。図 5 の右の正 5 角形の重心の座標は

$$\left(\frac{\tau^2+2\tau}{10},0,\frac{2\tau^2+2\tau+1}{10}\right)=\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{20},0,\frac{2\sqrt{5}+5}{10}\right)$$

となるから体積は

$$\frac{5}{4}\cot\frac{\pi}{5}\cdot\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{20}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}+5}{10}\right)^2}\div 3\cdot 12=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$$

表面積は

$$\frac{5}{4}\cot\frac{\pi}{5}\cdot 12=\left(15+6\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

2 面角は

$$\left(\frac{\tau^2}{2},0,\frac{1-\tau^2}{2}\right)$$

と

$$\left(-\frac{\tau^2}{2},0,\frac{1-\tau^2}{2}\right)$$

の間の角だから

$$\arccos\frac{-\frac{2+\sqrt{5}}{4}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=116.5650511770\ldots^\circ$$

4　4次元正 m 胞体

1つの辺に正 p 面体が q 個集まっていたとすると

$$\begin{cases} (\text{正 } p \text{ 面体の 2 面角}) \cdot q < 2\pi & (\text{集まった角の合計が } 2\pi \text{未満でないと} \\ & \ \text{4 次元的に広がらないから}) \\ q > 2 & (q \leq 2 \text{ では 4 次元的に広がらないから}) \end{cases}$$

3章を参照すると

$$(p,q) = (4,3), (4,4), (4,5), (8,3), (6,3), (12,3)$$

(1) $(p,q) = (4,3)$
このとき

$$m = 5$$

となり、頂点は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{20},\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{20},\right),$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{20},\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{20},\right),$$

$$\left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

の5つ。さて、 n 次元錐の体積を一般に求めておこう。底面積を S 、高さ

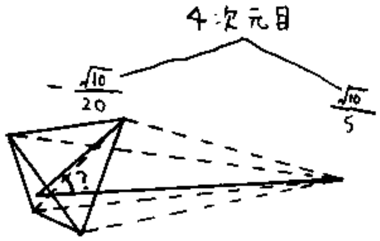

図 6: 正5胞体

を h とすると、図7の斜線部分の体積は柱体とみなせるので

$$S\left(\frac{t}{h}\right)^{n-1} \mathrm{d}t$$

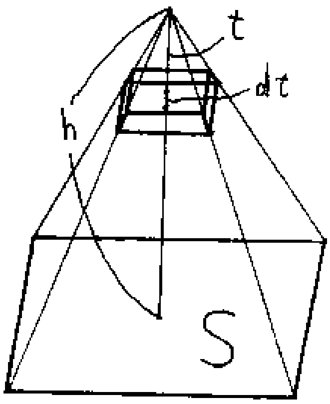

図 7: n 次元の錐体

となる。よって全体は

$$\int_0^h S\left(\frac{t}{h}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{St^n}{nh^{n-1}}\right]_0^h = \frac{Sh}{n}$$

つまり同じ底面積、高さの柱体の $\dfrac{1}{n}$ の体積しかもたない。もとにもどって、図 6 を錐体だと考えると体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}\div 4 = \frac{\sqrt{5}}{96}$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 5 = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

内角、2 面角の拡張として、胞と胞が面でどのような角度で接するかを”2 胞角”と名付けこれを求めよう。正 5 胞体の場合

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{10}}{20}\right)$$

から

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{20}\right)$$

と

$$\left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

に引いた線のなす角度が求めるべきものになる。vector は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right)$$

と

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$$

になるから正 5 胞体の 2 胞角は

$$\arccos \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \arccos \frac{1}{4} = 75.5224878140\ldots^\circ$$

(2) $(p, q) = (4, 4)$
このとき

$$m = 16$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0\right)$$

の置換 8 つ。体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2} \div 4 = \frac{1}{6}$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 16 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

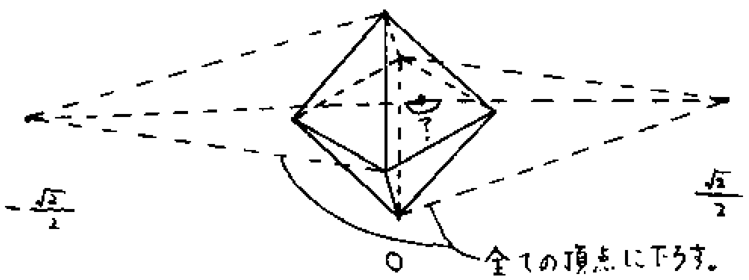

図 8: 正 16 胞体

2 胞角は図 8 の角度?だから

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, 0\right)$$

から

$$\left(0, 0, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

に引いた線のなす角度が求めるべきものになる。vector は

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

となるから正 16 胞体の 2 胞角は

$$\arccos \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

(3) $(p, q) = (4, 5)$
このとき

$$m = 600$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}\right)$$

と

$$(\pm\tau, 0, 0, 0)$$

の置換と

$$\left(\pm\frac{\tau^2}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, 0\right)$$

の偶置換の合計 120 個。図 9 の中で $\pm\frac{1}{2}$ だけが唯一辺の長さが 1 でなく、 τ である。だからこの辺たちは正 600 胞体の辺ではない。本当の辺は、今から述べる線分及び (3 次元内で) 視点を動かして同じ位置関係にある 720 本である。

(i) $\pm\tau$ と $\pm\frac{\tau^2}{2}$ のうち 1 つを結んだもの。

(ii) $\pm\frac{\tau^2}{2}$ の辺。

(iii) $\pm\frac{\tau^2}{2}$ のうちの 1 つの点 A に最も近い $\pm\frac{\tau}{2}$ の 5 つの点のうち 1 つと A を

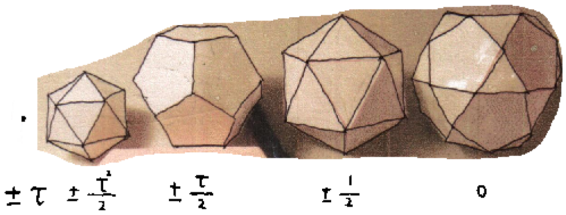

図 9: 正 600 胞体

結んだもの。
(iv) $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ と $\pm\dfrac{1}{2}$ の同じ向きに出っ張っている頂点同士を結んだもの。
(v) $\pm\dfrac{\tau}{2}$ の辺。
(vi) (iii) の $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ を $\pm\dfrac{1}{2}$ に変えたもの。
(vii) (iii) の $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ を 0 に、5 つを 2 つに変えたもの。
(viii) (iii) の $\pm\dfrac{\tau}{2}$ を 0 に変えたもの。
(ix) 0 の辺。
(x) (iv) の $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ を $-\dfrac{1}{2}$ に、 $\pm\dfrac{1}{2}$ を $\dfrac{1}{2}$ に変えたもの。
さて、体積を求めよう。(図 10 参照)

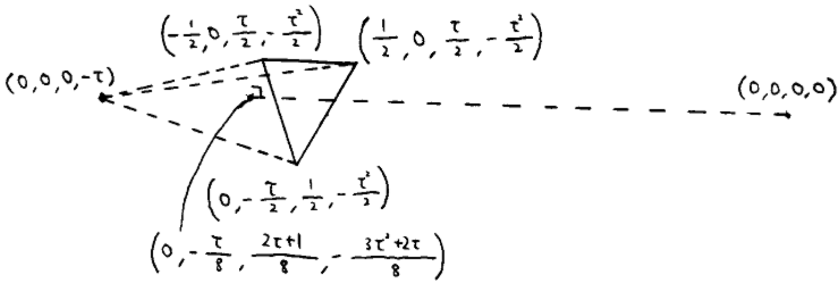

図 10: 正 600 胞体の一部

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\sqrt{\left(\frac{\tau}{8}\right)^2+\left(\frac{2\tau+1}{8}\right)^2+\left(\frac{3\tau^2+2\tau}{8}\right)^2}\div 4\cdot 600 &= \frac{25\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{50+25\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}
$$

また表面積は

$$
\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 600 = 50\sqrt{2}
$$

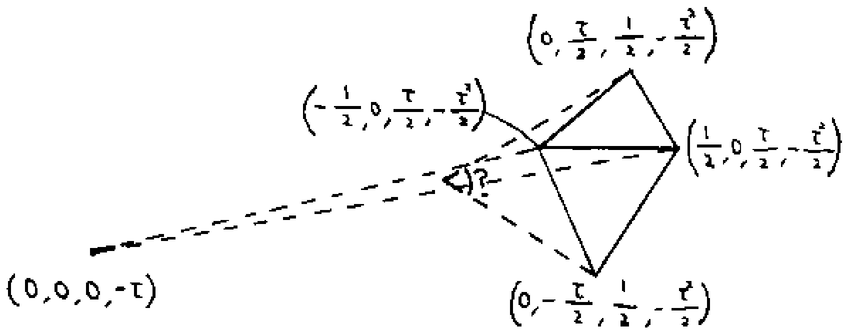

図 11: 正 600 胞体の別の一部

2 胞角は図 11 の角度?だから

$$
\left(0, 0, \frac{\sqrt{5}+1}{6}, -\frac{\sqrt{5}+2}{3}\right)
$$

から

$$
\left(0, \pm\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\tau^2}{2}\right)
$$

に引いた線のなす角度が求めるべきものになる。vector は

$$
\left(0, \pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{2-\sqrt{5}}{6}, \frac{\sqrt{5}-1}{12}\right)
$$

となるから正 600 胞体の 2 胞角は

$$
\arccos\frac{\frac{-1-3\sqrt{5}}{12}}{\frac{2}{3}} = \arccos\frac{-1-3\sqrt{5}}{8} = 164.4775121859\ldots^\circ
$$

(4) $(p,q)=(8,3)$
このとき

$$m=24$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$$

の置換 24 個。体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\div 4\cdot 24=2$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 24=8\sqrt{2}$$

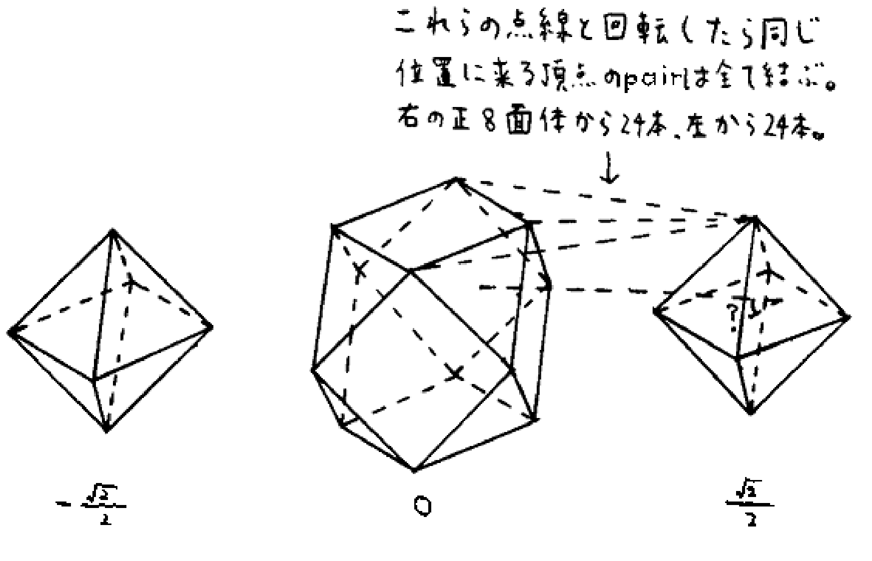

図 12: 正 24 胞体

2 胞角は図 12 の角度?だから

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

から

$$\left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

と

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

に引いた線のなす角度が求めるべきものになる。vector は

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 0\right)$$

と

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

になるから正 24 胞体の 2 胞角は

$$\arccos \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

(5) $(p, q) = (6, 3)$
このとき

$$m = 8$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

の 16 個。体積は

$$1^4 = 1$$

表面積は

$$1 \cdot 8 = 8$$

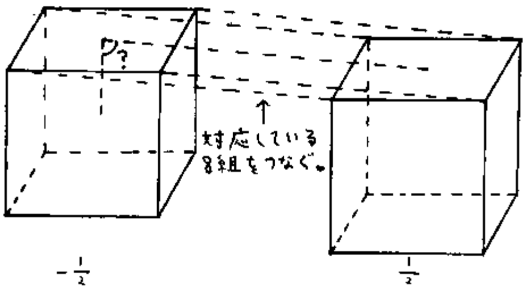

図 13: 正 8 胞体

2 胞角は図 13 の角度?だから

$$\left(0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

から

$$\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

と

$$\left(0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

に引いた線のなす角度が求めるべきものになる。vector は

$$\left(0, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

と

$$\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

になるから正 8 胞体の 2 胞角は

$$\arccos \frac{0}{\frac{1}{4}} = \arccos 0 = 90^\circ$$

(6) $(p, q) = (12, 3)$
このとき

$$m = 120$$

となり、頂点は

$$(\pm\tau^2, \pm\tau^2, 0, 0)$$

の置換、

$$\left(\pm\frac{\sqrt{5}\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}\right)$$

の置換、

$$\left(\pm\frac{\tau^3}{2}, \pm\frac{\tau^3}{2}, \pm\frac{\tau^3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

の置換、

$$\left(\pm\frac{\tau^4}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau}{2}\right)$$

の置換、

$$\left(\pm\frac{\tau^4}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}, 0\right)$$

の偶置換、

$$\left(\pm\frac{\sqrt{5}\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{\tau^3}{2}, 0\right)$$

の偶置換、

$$\left(\pm\tau^2, \pm\frac{\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau^3}{2}, \pm\frac{\tau}{2}\right)$$

の偶置換の合計 600 個。図 14 の中には辺が $1, \tau, \tau^2$ のものがまざっている。それどころか、$\pm\frac{\tau^3}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}$ については、面に正多角形でないもの [8] を含んでいる。無論辺の長さは 1 なので [9] 他の τ, τ^2 のものは辺ではない。本当の辺は、今から述べる線分及び (3 次元内で) 視点を動かして同じ位置関係にある 1200 本である。

(i) $\pm\frac{\tau^4}{2}$ の辺。

(ii) $\pm\frac{\tau^4}{2}$ と $\pm\frac{\sqrt{5}\tau^2}{2}$ の同じ方向に出っ張っている頂点同士を結んだもの。

(iii) $\pm\frac{\sqrt{5}\tau^2}{2}$ のうちの 1 つの点 A に最も近い $\pm\tau^2$ の頂点 3 つのうち 1 つと A を結んだもの。

[8] 辺の長さが $1, \tau$ が交互になった内角が全て 120° の 6 角形。

[9] 定義。

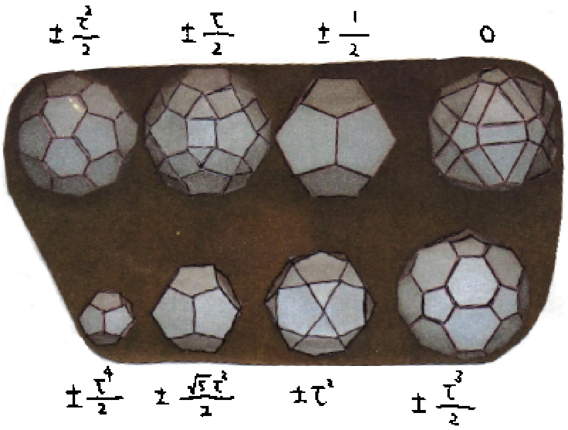

図 14: 正 120 胞体

(iv) $\pm\dfrac{\tau^3}{2}$ の辺。

(v) $\pm\dfrac{\tau^3}{2}$ の頂点に最も近い $\pm\tau^2$ の頂点を結んだもの。

(vi) (v) の $\pm\tau^2$ を $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ に変えたもの。

(vii) $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ の長さ 1 の辺。

(viii) (iii) の $\pm\dfrac{\sqrt{5}\tau^2}{2}$ を $\pm\dfrac{\tau^2}{2}$ に、$\pm\tau^2$ を $\pm\dfrac{\tau}{2}$ に、3 つを 2 つに変えたもの。

(ix) (v) の $\pm\dfrac{\tau^3}{2}$ を $\pm\dfrac{\tau}{2}$ に、 $\pm\tau^2$ を $\pm\dfrac{1}{2}$ に変えたもの。

(x) (ix) の $\pm\dfrac{1}{2}$ を 0 に変えたもの。

(xi) 0 の辺。

(xii) (ii) の $\pm\dfrac{\tau^4}{2}$ を $-\dfrac{1}{2}$ に、 $\pm\dfrac{\sqrt{5}\tau^2}{2}$ を $\dfrac{1}{2}$ に変えたもの。

体積は

$$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\tau^4}{2}\div 4\cdot 120=\frac{1575+705\sqrt{5}}{4}$$

表面積は

$$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\cdot 120=450+210\sqrt{5}$$

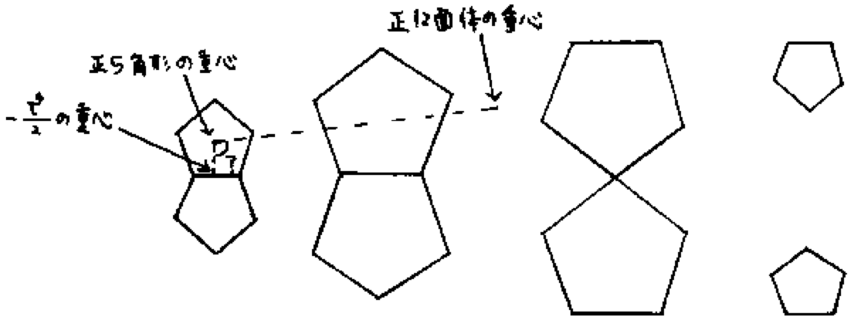

図 15: 正 120 胞体の一部

2 胞角は図 15 の角度?だから

$$\left(0, \frac{\tau^2+2\tau}{10}, \frac{2\tau^2+2\tau+1}{10}, -\frac{\tau^4}{2}\right)$$

から

$$\left(0, 0, 0, -\frac{\tau^4}{2}\right)$$

と

$$\left(0, \frac{\tau^3}{4}, \frac{2\tau^2+\tau}{4}, -\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\tau^2}{4}\right)$$

に引いた線のなす角度が求めるべきものになる。vector は

$$\left(0, -\frac{\tau^2+2\tau}{10}, -\frac{2\tau^2+2\tau+1}{10}, 0\right)$$

と

$$\left(0, \frac{5+2\sqrt{5}}{20}, \frac{15+7\sqrt{5}}{40}, \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)$$

になるから正 120 胞体の 2 胞角は

$$\arccos \frac{-\frac{20+9\sqrt{5}}{40}}{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} = \arccos\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = 144^\circ$$

5　5 次元正 m 胞体

1 つの面に正 p 胞体 (4 次元) が q 個集まっていたとすると

$$\begin{cases} (\text{正 } p \text{ 胞体の 2 胞角}) \cdot q < 2\pi & (\text{集まった角の合計が } 2\pi \text{未満でないと} \\ & \quad 5 \text{ 次元的に広がらないから}) \\ q > 2 & (q \leq 2 \text{ では 5 次元的に広がらないから}) \end{cases}$$

4 章を参照すると

$$(p, q) = (5, 3), (5, 4), (8, 3)$$

(1) $(p, q) = (5, 3)$
このとき

$$m = 6$$

となり、頂点は

$$(0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0),$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 0\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{10}}{4}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{10}}{20}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

の 6 個。ただし重心は原点に置いていない。体積は

$$\frac{\sqrt{5}}{96} \cdot \frac{\sqrt{15}}{5} \div 5 = \frac{\sqrt{3}}{480}$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{5}}{96} \cdot 6 = \frac{\sqrt{5}}{16}$$

2 胞角は $n(\geq 5)$ 次元に拡張できるように書くと

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}, 0, 0\right)$$

から

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(n-1)}}, 0\right)$$

と

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}, \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n}}\right)$$

に向かう直線の間の角となるから内積を使うと

$$\arccos \frac{\frac{1}{2(n-1)}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2n(n-1)} + \frac{n+1}{2n}}} = \arccos \frac{1}{n} < \frac{2}{5}\pi$$

(2) $(p, q) = (5, 4)$
このとき

$$m = 32$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, 0\right)$$

の置換 10 個。体積は

$$\frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \div 5 = \frac{\sqrt{2}}{30}$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{5}}{96} \cdot 32 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2 胞角は $n(\geq 5)$ 次元に拡張できるように書くと

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}, \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}, \ldots, \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}, 0\right)$$

から

$$\left(0, 0, \ldots, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

に向かう直線の間の角となるから内積を使うと

$$\arccos \frac{\frac{n-1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{2}}{\frac{n-1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{2}} = \arccos \frac{2-n}{n} < \frac{\pi}{2}$$

(3) $(p, q) = (8, 3)$
このとき

$$m = 10$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$$

の 32 個。体積は

$$1^5 = 1$$

表面積は

$$1 \cdot 10 = 10$$

2 胞角は $n(\geq 5)$ 次元に拡張できるように書くと

$$\left(0,0,\ldots,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

から

$$\left(0,0,\ldots,-\frac{1}{2},0\right)$$

と

$$\left(0,0,\ldots,0,-\frac{1}{2}\right)$$

に向かう直線の間の角となるから内積を使うと

$$\arccos\frac{0}{\frac{1}{4}} = \arccos 0 = 90^\circ$$

6　$n(\geq 5)$ 次元正 m 胞体

5(1) の形を胞として 5(1)(3) の 2 種類ができ、5(2) の形を胞として 5(2) の形が 1 種類でき、5(3) の形を胞とするものはないから、5 次元以上の正多胞体は 3 種類しかないことが分かる。
(1) 正 4 面体系列
このとき

$$m = n + 1$$

となり、頂点は

$$(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0,\ldots,0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},0,\ldots,0\right),$$

$$\ldots,\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\ldots,\frac{1}{\sqrt{2k(k-1)}},\sqrt{\frac{k+1}{2k}},0,\ldots,0\right),$$

$$\ldots,\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\ldots,\frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}},\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\right)$$

の $n+1$ 個。ただし重心は原点に置いていない。体積は 1 次元下の同系列のものに $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ を掛けて n で割ればよいから

$$1\cdot\sqrt{\frac{3}{2\cdot 2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{2\cdot 3}}\cdot\cdots\cdot\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\div 2\div 3\div\cdots\div n=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!}$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!}\cdot(n+1)=\frac{(n+1)\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!}$$

(2) 正 8 面体系列
このとき

$$m=2^n$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,\ldots,0\right)$$

の置換 $2n$ 個。体積は 1 次元下の同系列のものに $\sqrt{2}$ を掛けて n で割ればよいから

$$1\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}$$

表面積は

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!}\cdot 2^n=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\cdot\sqrt{n}}{(n-1)!}$$

(3) 正 6 面体系列
このとき

$$m=2n$$

となり、頂点は

$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\ldots,\pm\frac{1}{2}\right)$$

の 2^n 個。体積は

$$1^n = 1$$

表面積は

$$1 \cdot 2n = 2n$$

7 まとめ

n	正多胞体の種類
2	∞
3	5
4	6
5	3
6	3
7	3
$\vdots$	$\vdots$

8 おわりに

今回の report では、正多胞体の種類の調べ上げ+具体例が両方きちんと出来て良かったと思っています。
しかし、文献の確認[10] をしていないので、数値計算が正しいのかは怪しいです。
自分なりに頑張って満足の行く結果が得られたとは思うので、後悔はしていません。
以上です。

[10]正多胞体の体積や表面積が載った書籍の存在が確認できなかった、というか、input は”正多胞体”という言葉を聞いたことだけで、文献は一切参考にしていない。