n 次元球の体積・表面積

木村 冬馬

平成 21 年 6 月 7 日

0 はじめに

本日は数学研究部の部誌を手にとって頂きありがとうございます。本稿では題名通り n 次元球の体積・表面積を求めていきたいと思います。

1 n 次元球とは?

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とした n 次元 Euclid 空間において

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2 (r \text{ は半径})$$

で定義される領域のことである。簡単に言えば、二次元における円、三次元における球のようなものである。

2 体積

はじめに、n 次元単位球 (半径が 1 ということ) の体積 V_n を求めよう。以下、n 次元球のことを超球、その体積を超積などとは言わず、便宜上あたかも $n = 3$ であるかのように単語を使う。図 1 のように、$x \leq x_1 \leq x + \mathrm{d}x$ の範囲を考えると、$\mathrm{d}x$ を十分小さくとると柱体とみなせるから

$$\underline{(\text{半径}\sqrt{1-x^2}\text{の円 } ((n-1) \text{ 次元球}) \text{ の面積})} \times \mathrm{d}x$$

が体積となる。下線部分は $V_{n-1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$ となるから

$$W_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x$$

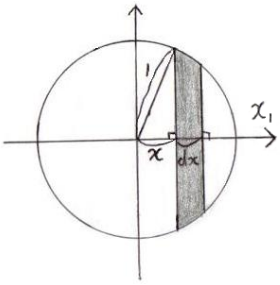

図 1: 平行な平面で切る

とおくと

$$
\begin{aligned}
V_n &= \int_{-1}^{1} V_{n-1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x = V_{n-1}W_n && (1)\\
W_n &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x(\text{再掲})\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta(x=\sin\theta\text{とおき置換積分})\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}\theta\mathrm{d}\theta && (2)\\
&= \left[\sin\theta\cos^{n-1}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(\cos^{n-1}\theta)'\mathrm{d}\theta((\sin\theta)'=\cos\theta\text{を使い部分積分})\\
&= (0-0) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot(n-1)\cos^{n-2}\theta\cdot(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta(n\leq 2)\\
&= (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta\\
&= (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta - (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}\theta\mathrm{d}\theta\\
&= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n((2)\text{ より})\\
\therefore W_n &= \frac{n-1}{n}W_{n-2}(n\leq 2)
\end{aligned}
$$

(i) $n=2m(m\in\mathbb{N})$ のとき

$$
W_n = \frac{n-1}{n}\cdot W_{n-2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot W_{n-4}\\
&\vdots\\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot W_0\\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot\pi
\end{aligned}
$$

(ii) $n=2m-1(m\in\mathbb{N})$ のとき

$$
\begin{aligned}
W_n &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot W_1\\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3}\cdot 2
\end{aligned}
$$

(I) $n=2m(m\in\mathbb{N})$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1}W_n((1)\text{ より})\\
&= V_{n-2}W_nW_{n-1}\\
&= V_{n-2}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{(n-2)\cdot(n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3}\cdot 2\pi\\
&= \frac{2\pi}{n}V_{n-2}
\end{aligned}
$$

(II) $n=2m-1(m\in\mathbb{N})$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-2}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3}\cdot\frac{(n-2)\cdot(n-4)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot 2\pi\\
&= \frac{2\pi}{n}V_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore V_n=\frac{2\pi}{n}V_{n-2}(n\leq 2)$$

いま $V_1=2, V_2=\pi\left(=\frac{2\pi}{2}\right)$ だから

(1) $n=2m(m\in\mathbb{N})$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_n &= \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{2\pi}{2}\left(=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n!!}\right)\\
&= \frac{(2\pi)^m}{2^m\cdot m!}=\frac{\pi^m}{m!}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}
\end{aligned}
$$

(2) $n=2m-1(m\in\mathbb{N})$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_n &= \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot 2(=\frac{2(2\pi)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!!})\\
&= \frac{2^m\cdot\pi^{m-1}}{\frac{(2m-1)!}{2^{m-1}\cdot(m-1)!}}=\frac{2^{2m-1}\cdot\pi^{m-1}\cdot(m-1)!}{(2m-1)!}=\frac{2^n\cdot\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]!}{n!}
\end{aligned}
$$

よって n 次元球の体積 V_n' は半径を r とすると

$$V_n' = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & (n = 2m (m \in \mathbb{N}) \text{ のとき}) \\ \dfrac{2^n \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{n}{2}\right]! r^n}{n!} & (n = 2m-1 (m \in \mathbb{N}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

3 表面積

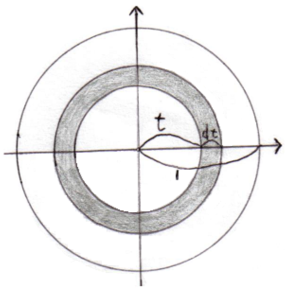

図 2: タマネギ状に切る

3. と同様に、 n 次元単位球の表面積 S_n から求めよう。図 2 のように球を同心球によってタマネギ状に切り分ける。$\mathrm{d}t$ を十分小さくとると斜線部分の体積は

$$\underline{(\text{半径 } t \text{ の } n \text{ 次元球の表面積})} \times \mathrm{d}t$$

となる。下線部分は $S_n t^{n-1}$ となるから

$$\begin{aligned} V_n &= \int_0^1 S_n t^{n-1} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{S_n t^n}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{S_n}{n} \\ \therefore S_n &= nV_n \end{aligned}$$

よって n 次元球の表面積 S'_n は半径を r とすると

$$S'_n = \begin{cases} \dfrac{n\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & (n = 2m(m \in \mathbb{N}) \text{ のとき}) \\ \dfrac{2^n \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{n}{2}\right]! r^n}{(n-1)!} & (n = 2m-1(m \in \mathbb{N}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

4　おわりに

$n = 2, 3$ などを代入してぜひご自分で確かめてみてください。$n = 4$ のときの球面は Perelman(ロシア人、1966-) が 1992-3 年に証明した Poincaré 予想とも関係があるようです。興味のある方は調べてみてください。