ピタゴラス数

高校 2 年 4 組 44 番 松尾 佳紀

1 ピタゴラス数とは

ピタゴラスの定理より下のような直角三角形について

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立ちます。a, b, c が自然数であるような (a, b, c) の組をピタゴラス

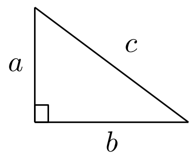

図 1: 直角三角形

数といいます。また,a, b, c が公約数を 1 しかもたないピタゴラス数を既約ピタゴラス数といいます。

2 ピタゴラス数の一般解

ピタゴラス数の一般解を考えます。

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

であるから、単位円の第 1 象限上に存在する有理点 (X, Y) を考えれば良いと分かります。

ここで (X, Y) と $(-1, 0)$ を通る直線と y 軸との交点を $(0, t)$ とすると $t = \dfrac{Y}{X+1}$ なので t も有理数となり図より $0 < t < 1$

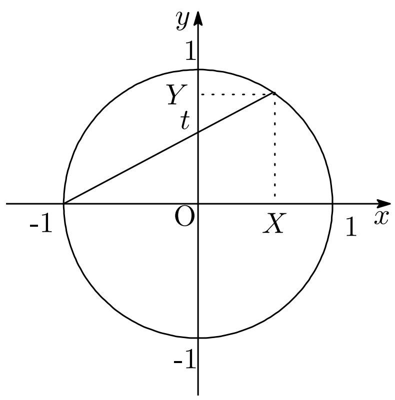

図 2: 単位円

よって $t=\dfrac{n}{m}$(m,n は $m>n$ をっ満たす互いに素な自然数) とおけます。
X,Y を t で表すと、$X^2+Y^2=1$ かつ $Y=t(X+1)$ より

$$X^2+t^2(X+1)^2=1$$

$$\therefore(X,Y)=\left(\frac{1-t^2}{t^2+1},\frac{2t}{t^2+1}\right)$$

これに、$t=\dfrac{n}{m}$ を代入すると

$$X=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}Y=\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

m^2-n^2 と m^2+n^2,$2mn$ と m^2+n^2 は互いに素なので全てのピタゴラス数 (a,b,c) は

$$(a,b,c)=(l(m^2-n^2),2lmn,l(m^2+n^2))\ (l\text{ は自然数})$$

の形で表せる。また、$\{l(m^2-n^2)\}^2+(2lmn)^2=\{l(m^2+n^2)\}^2$ なのでこのような形で表せる (a,b,c) は全てピタゴラス数である。

3 ピタゴラス数と行列

2. より $0<t<1$ である有理数 t が 1 つ定まると既約ピタゴラス数が 1 つ定まる。$t'=\dfrac{1}{2-t},t'=\dfrac{1}{2+t},t'=\dfrac{1}{2+\frac{1}{t}}$ のように新しいパラメーター

t' を設定して 1 つのピタゴラス数から新しい 3 つのピタゴラス数を作ることを考える。
たとえば $(3,4,5)$ のパラメーターは $\dfrac{1}{2}$ なのでそこから $\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{4}$ というパラメーターを考え $(5,12,13)(21,20,29)(15,8,17)$ という 3 つの既約ピタゴラス数が $(3,4,5)$ から作れる。
このような変換を行列で表す。
$t'=\dfrac{n'}{m'},t=\dfrac{n}{m}$ (m と n,m' と n'は互いに素な自然数) を
$t'=\dfrac{1}{2-t},t'=\dfrac{1}{2+t},t'=\dfrac{1}{2+\frac{1}{t}}$ に代入すると、
$(m',n')=(2m-n,m),(2m+n,m),(m+2n,n)$ と分かる。
新しいピタゴラス数を (a',b',c') とすると 2. で求めたピタゴラス数の一般解より、

$$\begin{aligned}
(a',b',c') &= (3m^2-4mn+n^2,4m^2-2mn,5m^2-4mn+n^2)\\
&= (a-2b+2c,2a-b+2c,2a-2b+3c)\\
(a',b',c') &= (3m^2+4mn+n^2,4m^2+2mn,5m^2+4mn+n^2)\\
&= (a+2b+2c,2a+b+2c,2a+2b+3c)\\
(a',b',c') &= (m^2+4mn+3n^2,4n^2+2mn,m^2+4mn+5n^2)\\
&= (-a+2b+2c,-2a+b+2c,-2a+2b+3c)
\end{aligned}$$

　したがって、新しいピタゴラス数 (a',b',c') は元のピタゴラス数 (a,b,c) を用いて

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\-b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\-b\\c\end{pmatrix}\qquad \text{と書ける。}$$

この行列を使って次々とピタゴラス数を作ることが出来る。たとえば $(3,4,5)$ というピタゴラス数から始めると次のようになる。

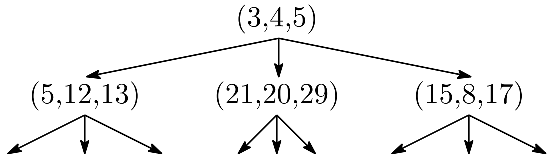

図 3: 例

全ての既約ピタゴラス数は $(3,4,5)$ から始まるこの樹形図の中にあることを証明する。

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{なので}$$

$$c = -2a' - 2b' + 3c'$$

$$c' - c = 2(a' + b' - c')$$

$$\therefore c' > c \ (\because a' + b' > c')$$

したがって (a', b', c') から (a, b, c) に遡ると斜辺の値は小さくなる c は自然数のみを取るので任意の既約ピタゴラス数は遡ると $a^2 + b^2 = c^2, c = 1$ を満たす整数の組 (a, b, c) にいつかはたどりつく。そのような (a, b, c) は $(a, b, c) = (0, 1, 1)(0, -1, 1)(1, 0, 1)(-1, 0, 1)$ である。ところで、

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

より、$(0, 1, 1), (1, 0, 1)$ は循環し、また (a, b, c) の a は必ず奇数なので $(4, 3, 5)$ をとらない。したがって、任意の既約ピタゴラス数は遡ると必ず $(3, 4, 5)$ をとる。

4　θ ピタゴラス数の一般解

内角に θ がある三角形について辺の長さを下の図のように定めると、余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

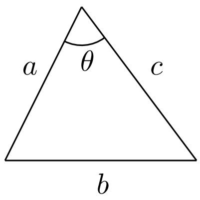

図 4: 三角形

これを満たす自然数 a, b, c について考える。
$\cos\theta = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ であるから $\cos\theta$ は有理数である。
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ より、

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\frac{a}{c}\frac{b}{c}\cos\theta$$

$X = \dfrac{a}{c}, Y = \dfrac{b}{c}$ とおくと、

$$X^2 + Y^2 - 2\cos\theta XY = 1$$

このグラフは $(1+\cos\theta)X^2 + (1-\cos\theta)Y^2 = 1$ を正の向きに 45° 回転させた楕円となる。よって、(X, Y) は下の図のような楕円上にある第 1 象限の有理点である。

(X, Y) と $(-1, 0)$ を通る直線と y 軸との交点を $(0, t)$ とする。t は有理数である。X, Y を t で表すと $X^2 + Y^2 - 2\cos\theta XY = 1$ かつ $Y = t(X+1)$ より

$$X^2 + t^2(X^2 + 2X + 1) - 2\cos\theta t(X^2 + X) - 1 = 0$$

$$\therefore X = \frac{1 - t^2}{t^2 - 2\cos\theta t + 1}$$

$$Y = \frac{-2\cos\theta t^2 + 2t}{t^2 - 2\cos\theta t + 1}$$

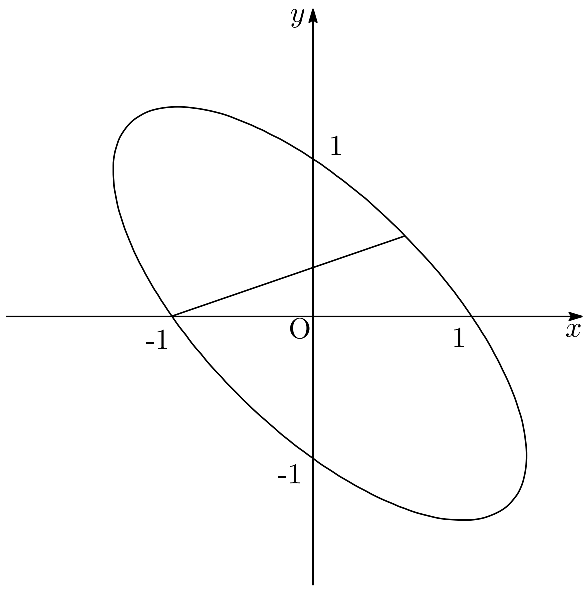

図 5: 楕円

$t = \dfrac{n}{m}, \cos\theta = \dfrac{q}{p}$($m$ と n, p と q は互いに素な整数) とおけるから

$$X = \frac{p(m^2 - n^2)}{pn^2 - 2qmn + pm^2}, Y = \frac{qn^2 + 2qmn}{pn^2 - 2qmn + pm^2}$$

したがって、

$$a = lp(m^2 - n^2)$$

$$b = l(qm^2 + 2pmn)$$

$$c = l(pn^2 - 2qmn + pm^2)$$

となる。(l は自然数)

5 最後に

θ ピタゴラス数の行列変換が分からなかったのが残念です。オチはありません。