$\mathbb{Z}[i]$ における Dirichlet の算術級数定理

高校 2 年 組 番　清水元喜

1　はじめに

本日は数学研究部にお越しいただきありがとうございます。はじめにこの記事で扱う内容について少し解説します。

整数論の有名な定理に「Dirichlet の算術級数定理」というものがあります。これは、「$(a,m)=1$ ならば、$p \equiv a \pmod{m}$ なる素数 p は無限にある。」というものです。これを a,m が整数の場合から $\mathbb{Z}[i]$ の整数 の場合に拡張しよう、というのがこの記事の目標です。

2　準備

2.1　整数論

整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ 素数全体の集合を $\mathbb{P}$ 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ であらわすことがある。

定義 2.1 (合同式). m が $(a-b)$ を割り切るとき、$a \equiv b \pmod{m}$ とかく。

命題 2.2 (フェルマーの小定理). p を素数とし、$(a,p)=1$ とする。このとき

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

証明略

命題 2.3 (原始根の存在). p を素数とすると、$p-1$ 乗して初めて 1 に合同になるような数 g が存在する。このとき、$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$[1]は g を生成元とする巡回群[2]になる。すなわち $\{\overline{1},\overline{2}\ldots,\overline{p-1}\}=\{\overline{g},\overline{g^2},\ldots\overline{g^{p-1}}=\overline{1}\}$ となる。

証明略

[1] $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ から 0(正確には p と互いに素でない数) を除いた集合

[2] ある G の元 g があって、任意の G の元 x について、$x=g^n$(n は整数) と書けるような集合 G のこと。このとき g を生成元と呼ぶ。

定義 2.4 (位数). p の倍数でない a に対し、$a^h \equiv 1 \pmod p$ となるような最小の自然数 h を a の $\mathrm{mod} p$ での位数という。命題 2.3 を使うとすぐに分かるが[3]、$h \mid (p-1)$ である。

2.2 $\mathbb{Z}[i]$

定義 2.5 ($\mathbb{Z}[i]$).

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ここで i は当然 1 の原始 4 乗根。すなわち虚数単位である。

定義 2.6 (共役). $\alpha = a + bi$ に対し $\overline{\alpha} = a - bi$ を α の共役と呼ぶ。

定義 2.7 (ノルム). α のノルムを $N\alpha = a^2 + b^2$ で定める。

定義 2.8 (単数). ノルムが 1 である $\mathbb{Z}[i]$ の元を単数と呼ぶ。$\mathbb{Z}[i]$ の単数は $1, i, -1, -i$ の 4 つである。

定義 2.9 (同伴). 単数をかけて等しくなるような $\mathbb{Z}[i]$ の元どうしの関係を同伴と呼ぶ。つまり $2 + 3i$ と $-3 + 2i$ は同伴、というように。

定義 2.10 (素数). π が自分自身とその同伴数、および単数以外の約数を持たないとき π を素数と呼ぶ。

命題 2.11.

$$N\alpha N\beta = N\alpha N\beta$$

命題 2.12 (割り算). $\mathbb{Z}[i]$ では余りのある割り算ができる。すなわち、任意の $\gamma, \gamma_1 \neq 0$ に対して、

$$\gamma = \kappa\gamma_1 + \gamma_2, N\gamma_2 < N\gamma_1$$

なる κ, γ_2 が一意的に定まる。

命題 2.13 (素数). $\mathbb{Z}[i]$ の素数は次の 3 種類。

1. 2, およびそれに同伴な数。
2. $N\pi = p \equiv 1 \pmod 4$ なる π。ここで p は有理素数（$\mathbb{Z}$ における素数）
3. $p \equiv 3 \pmod 4$ なる有理素数 p およびその同伴数。

[3]使わなくても分かる気がしてきた実は命題 2.2 だけでええんか。まあええや

補足すると、*2* で、各 p につきこのような π は（同伴なものをのぞき）2 通りのみである。そしてその二つは互いに共役である。

命題 2.14 (素因数分解の一意性). $\mathbb{Z}[i]$ の単数でない任意の元は、自明な差異を除いて素数の積に一意的に分解される。ここにいう自明な差異とは、素数の単数倍の不確定性および素数のならぶ順序である。

はて、素数の単数倍の不確定性とやらがあるんですか、それはどうもめんどくさい。というわけで整数の代わりに「イデアル」とやらを考えてやりましょう。

定義 2.15 (イデアル). $\mathbb{Z}[i]$ の整数からなる集合 A が次の 2 つの性質を満たすとき A をイデアルという。

- $\alpha, \beta \in A \to \alpha + \beta, \alpha - \beta \in A$
- $\lambda \in \mathbb{Z}[i], \alpha \in A \to \lambda\alpha \in A$

ただし、0 のみからなる集合はイデアルでないとする。

命題 2.16. $\mathbb{Z}[i]$ のイデアルは単項イデアル、つまり $(a) = \{\lambda a | \lambda \in \mathbb{Z}[i]\}$ の形のものだけである。このとき a を生成元という。

この命題から、（この部誌の中では）「イデアルってのは同伴数を一まとめにしたものだ」くらいの認識でオッケーです。（筆者もぶっちゃけ詳しくないです。この部誌を書き終わったら勉強する予定です。）

イデアルの積、共役、ノルムもそれぞれ生成元の積、共役、ノルムで自然に定まるものだと思ってくれていいです（$\mathbb{Z}[i]$ 以外で話をするときはこんないい加減なノリじゃいけませんよ。いいときもありますが例外中の例外です。）

命題 2.17. $\mathbb{Z}[i]$ の任意のイデアルは素イデアルの積に一意的に分解される。

ここで出てくる素イデアルというのも生成元が素数であるイデアルのことです。自然ですね。

2.3 解析

定義 2.18 (有界). 集合 S に属する数がすべて一つの数 M よりも大［あるいは小］でないときには、S は上方［あるいは下方］に有界であるといい、M をその一つの上界［あるいは下界］という。上方にも下方にも有界ならば、単に有界という。

定義 2.19 (極限)**.** 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとき、それに対応して一つの番号 n_0 が

$$n > n_0 \text{なるとき} \ |\alpha - a_n| < \epsilon$$

となるように定めれることを言う。[4]

命題 2.20. 収束する数列は有界である。

命題 2.21. 有界なる単調数列は収束する。

定理 2.22 (Cauchy の判定法)**.** 数列 $\{a_n\}$ が収束するために必要かつ十分なる条件は、任意の $\epsilon > 0$ に対応して番号 n_0 が定められて、

$$p > n_0, q > n_0 \text{なるとき} \ |a_p - a_q| < \epsilon$$

となることである。

定義 2.23 (無限級数とその収束)**.** 数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ の最初の n 項の和を

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$$

とする。もしも（有限なる）極限値

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

が存在するならば、無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

は収束するといい、極限 s をこの無限級数の和と略称する。極限値が存在しないとき（$\lim s_n = \pm\infty$ をも含めていう）には無限級数は発散するという。

Cauchy の判定法（定理 2.22）によれば収束の必要かつ十分なる条件は、どんな $\epsilon > 0$ に対しても

$$R_{n,m} = s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$$

とおくとある番号以上で $|R_{n,m}| < \epsilon$。

---

[4]感覚的には、a_n が限りなく α に近づいていくのですが、それを数式で表現するとこうなります。

定義 2.24 (絶対収束、条件収束). 無限級数 $\sum a_n$ の絶対値の級数 $\sum |a_n|$ が収束するときには、原級数も収束する。—実際

$$|R_{n,m}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_m| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots |a_m|$$

で、仮定によって、右辺は $n \to \infty$ のとき、限りなく小さくなるから、左辺も同様である。この場合に、級数 $\sum a_n$ は絶対収束をするという。

級数が収束して、しかも絶対収束をしないときは、それを条件収束という。

絶対収束の級数は項を勝手に並び替えてよいなどおおむね有限和と同様の性質を持つ。

定義 2.25 (一様収束). 或る区間に属する各点 x において、関数の一列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

が収束するときには、極限値はその区間における x の関数である。それを $f(x)$ とする。もしも

$$n > N, x \in [a,b] \text{ なるとき、常に } |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

すなわち収束の早さが x によらずに評価できるときに関数列 $\{f_n(x)\}$ は $[a,b]$ において一様に（または平等に）$f(x)$ に収束するという。

無限級数の項 $a_n = a_n(x)$ が x の関数である場合に、或る区間において $s_n(x) = \sum_{v=1}^{n} a_v(x)$ が一様に収束するとき、この級数を一様に収束するという。この場合 $s_n(x) \to s(x)$ として

$$s(x) - s_n(x) = \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v(x) = R_n(x)$$

と置けば、$R_n(x)$ は一様に 0 に収束する。

級数の一様収束は、しばしば、次の定理によって確かめられる。

定理 2.26. 或る区間において常に $|a_n(x)| \le c_n, c_n$ は正の定数で、$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束すれば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ はその区間において絶対一様収束する。

定義 2.27. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が有界であるときに $f(x) = O(g(x))$ と書く。また、$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ (何も断らない場合 $x \to \infty$, 他の値への極限をとることも当然ある) であるときに、$f(x) = o(g(x))$ と書く。また、$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$(同上) であるときに、$f(x) \sim g(x)$ と書く。

2.3.1 複素解析

定義 2.28 (位相の用語)**.** $U \subset \mathbb{C}$ が開集合であるとは、任意の $a \in U$ に対してある ϵ が存在して、

$$|z-a| < \epsilon \Rightarrow z \in U$$

が成り立つことを言う。a を含む開集合を a の開近傍といい、a のある開近傍を含む集合を a の近傍という。

補集合が開集合であるような集合を閉集合という。有界な閉集合をコンパクト集合という。

命題 2.29. f が連続 $\Rightarrow |f|$ は任意のコンパクト集合上で最大値を持つ

$\mathbb{C}$ においても、絶対収束/条件収束、一様収束などの概念は同様に定義される。

定義 2.30 (正則関数)**.** 開集合 U 上定義された複素微分可能な関数を U 上の正則関数という。f が正則であることは、定義域内の任意の a の近傍で

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

と *Taylor* 展開できることと同値である。

命題 2.31 (一致の原理)**.** 正則関数 f, g があってある点の近傍で $f = g\ \Rightarrow$ 定義域全体で $f = g$

命題 2.32. 領域 $\{z | r < |z-a| < R\}$ 上の正則関数 f に対して無限級数表示

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

ができる。これを *Laurent* 展開と呼ぶ。

定義 2.33 (特異点)**.** 正則関数が a の近傍で定義されており a では定義されていないとし、前命題の *Laurent* 展開を考える。$a_-n \neq 0$ なる整数 n に上界が存在しないとき、a を真性特異点という。そうでないとき、$a_-n \neq 0$ なる整数 n の最大値を m とし、次のように定義する。

- $m \geq 0$ のとき f を正則に拡張して a を定義域に付け加えることができる。このような a を除去可能特異点という。
- $m > 0$ のとき、a を m 位の極という。

開集合 U 上の、極を除いて定義された正則関数を有理型関数という。

定義 2.34 (留数). 有理型関数の極に対して、留数という値が定義される。$z = z_0$ を極にもつ有理型関数 $f(z)$ が与えられたとき、f の $z = z_0$ の周りでの *Laurent* 展開の $\dfrac{1}{z - z_0}$ の係数 a_{-1} を f の $z = z_0$ での留数と呼び、$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$ と書く。とくに $z = z_0$ が 1 の極であるとき、明らかに

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \{(z - z_0) f(z)\}$$

命題 2.35. f, g が正則関数 $\Rightarrow f \pm g, fg, f^{-1}$ はそれぞれ正則（いずれも演算が定義されるとき）また、f, g が有理型関数で g が恒等的に 0 でないならば有理型関数 f/g が自然に定義できる。

命題 2.36. $f_1, f_2, \ldots$ を正則関数列とし、これが U 上の任意のコンパクト集合上で f に一様収束しているならば、f は正則関数であり、

$$f'(z) = \lim_{n \to \infty} f_n'(z)$$

定義 2.37 (解析接続). 2 つの領域 D_1, D_2 が共通部分を持つとする。$f_1(z)$ が D_1 で正則な（もしくは有理型）関数であるとき、$D_1 \cap D_2$ で $f_1(z)$ と同じ値をとり、しかも D_2 で正則な（もしくは有理型）関数が存在する場合、$f_2(z)$ を $f_1(z)$ の D_2 への解析接続であるという。命題 2.31（一致の原理）より、D_2 への解析接続は一意的に定まる。

例.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

は $|z| < 1$ で収束、$|z| \geq 1$ で発散するから、$|z| < 1$ でのみ定義される関数で、

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - z} (|z| < 1)$$

である。一方、関数

$$f_2(z) = \frac{1}{1 - z} (z \neq 1)$$

は $\mathbb{C} - \{1\}$ で定義される正則関数である。今 2 つの関数の定義域の共通部分 $|z| < 1$ で $f_1 = f_2$ であるから、f_2 は f_1 の $z = 1$ を除く $\mathbb{C}$ 上への解析接続である。

2.4 指標

定義 2.38 (Abel 群). 集合 G について、演算 $+ : G \times G \to G$ が定められており、G の任意の元 a, b, c について以下の $(G1)$〜$(G4)$ が成り立つとき、G は *Abel* 群（加群）であるという。

G1 $a+b=b+a$

G2 $a+(b+c)=(a+b)+c$

G3 G の元 e で任意の G の元 a について $a+e=e+a=a$ を満たすものがある

G4 任意の G の元 b について $b+(-b)=(-b)+b=e$ を満たすような G の元 $(-b)$ が存在する

以下 G を有限 Abel 群とします。

定義 2.39 (位数). G の元の個数を G の位数と呼び、$card(G)$ と書く。

定義 2.40 (指標). G の指標とは、G から $\mathbb{C}^*$ への写像 χ で、任意の G の元 a,b に対し $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$ を満たすもののことである。G の指標全体の集合を $\hat{G}$ であらわす。

命題 2.41. χ を指標とすると $|\chi(a)|=1$

これは $a^{card(G)}=e$(単位元) より分かります。

命題 2.42 (指標群). $\chi_1,\chi_2\in\hat{G}$ について $\chi_1\chi_2(a)=\chi_1(a)\chi_2(a)$ と定義することで $\hat{G}$ はこの演算について $Abel$ 群となる。これを G の指標群と呼ぶ。また、以下でこの群の単位元（すなわち全ての元を 1 に移す指標：単位指標とも言う）を誤解の恐れのないときは 1 と書くことがある。

命題 2.43. H を G の部分群とする。このとき H の指標は G での指標に拡張することができる。

命題 2.44. G が有限位数の群であるとき、$card(G)=card(\hat{G})$

命題 2.45. $n=card(G),\chi\in\hat{G}$ とすると、

$$\sum_{a\in G}\chi(a)=\begin{cases} n\ (\chi=1) \\ 0\ (\chi\neq 1)\end{cases}$$

命題 2.46. $n=card(G),a\in G$ とすると、

$$\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi(a)=\begin{cases} n\ (a=1) \\ 0\ (a\neq 1)\end{cases}$$

また、特に G として $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ を考えるとき、$(a,m)>1$ なる a について $\chi(a)=0$ と定めることで χ を $\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ なる写像だとみなすことができる。これを $\bmod m$ の指標と呼ぶ。

3 Dirichlet 級数

定義 3.1 (Dirichlet 級数)**.** $\lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: 単調増加、$+\infty$ に発散 とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \quad (a_n, z \in \mathbb{C})$$

の形の級数を *Dirichlet* 級数と呼ぶ。

但し以下では基本的に $\lambda_n = \log n$、すなわち

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

の形のものだけを考える。

命題 3.2. $f(s)$ が $s = s_0$ で収束するなら、f は $\mathrm{Re}(s - s_0) \geq 0, \mathrm{Arg}(s - s_0) \leq \alpha < \pi/2$ なる任意の領域で一様収束する。

系 3.3. $s = s_0$ で f が収束するならば $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ なる領域で f は収束し正則である。

系 3.4. $\mathrm{Re}(s - s_0) \geq 0, |\mathrm{Arg}|(s - s_0) \leq \alpha < \pi/2$ なる領域で、$s \to s_0$のとき $f(s) \to f(s_0)$.

系 3.5. $f(s)$ が恒等的に $0 \Leftrightarrow a_n$がすべて 0

命題 3.6. a_nが有界ならば $f(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束

4 Riemannζ

定義 4.1. 乗法的関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ が乗法的関数であるとは、$(a, b) = 1$ のとき $f(a)f(b) = f(ab)$ が成り立つことを言う。任意の実数について $f(a)f(b) = f(ab)$ が成り立つときに、f を完全乗法的であるという。

明らかに、乗法的関数についてはその素数冪での値を、完全乗法的関数についてはその素数での値を調べればすべての自然数について分かる。
以下 f を有界な乗法的関数とする。

補題 4.2. $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{f(p)}{p^s})^{-1} \text{ (任意の素数 } p \text{ で } |f(p)| < |p^s| \text{ のとき)}\end{aligned}$$

収束とか気にしなければこの補題は明らかです。そして $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して絶対収束というおいしい条件があるので無限積の形に無事直せるのです。

定義 4.3 (ζ 関数)**.** $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して命題 3.6 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は絶対収束する。したがってこの範囲でこれを s の関数とみなることができ、それを $\zeta(s)$ であらわす。補題 4.2 より、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

である。この右辺の積表示を ζ 関数の *Euler* 積表示という。

命題 4.4. **(a)** $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則であり零点を持たない。

(b)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$$

ここで $\phi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則な関数である。すなわち $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ に解析接続され $s = 1$ で 1 位の極を持ち $\mathrm{Res}_{\mathrm{s}=1}\zeta(s) = 1$ である。

証明. **(a)** 系 3.3 より明らか。

(b)

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} t^{-s} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt \text{ より、}$$

$\displaystyle\phi_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s}) dt$ とおき、$\displaystyle\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則であることをいえばよい。今各 $\phi_n(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則なのは明らかなので、命題 2.36 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \phi_n(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > 0$ 上の任意のコンパクト集合上で一様収束することを示せばよい。

$$\begin{aligned} |\phi_n(s)| &\leq \int_n^{n+1} |n^{-s} - t^{-s}| dt \\ &\leq \sup_{n \leq t \leq n+1} |n^{-s} - t^{-s}| \end{aligned}$$

ところで今、

$$\begin{aligned}|n^{-s}-t^{-s}| &= |\int_n^t \frac{s}{t^{s+1}}dt| \\ &\le \int_n^t |\frac{s}{t^{s+1}}|dt \\ &= |s|\int_n^t \frac{dt}{t^{x+1}} \quad (x=\mathrm{Re}(s)) \\ &\le \frac{|s|}{n^{x+1}}\end{aligned}$$

より、$\phi_n(s) \le \frac{|s|}{n^{x+1}}$。今 S をコンパクト集合とすると、$s \in S$ に対し $|s|$ 、$\mathrm{Re}(s)$ にはそれぞれ最小値と最大値が存在するからそれを M, m とすると、S 上で $|\phi_n(s)| \le \frac{M}{n^{m+1}}$ 命題 2.26 より、$\sum_{n=1}^{k}\phi_n(s)$ はこのコンパクト集合上で絶対一様収束する。ゆえに $\phi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則。

□

系 4.5. $s \to 1$ のとき $\sum \frac{1}{p^s} \sim \log\frac{1}{s-1}$、$\sum_{p,k\ge 2}\frac{1}{p^{ks}}$ は有界。

証明.

$$\begin{aligned}\log\zeta(s) &= \sum_{p\in\mathbb{P}} -\log(1-\frac{1}{p^s}) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{P},k\ge 1}\frac{1}{kp^{ks}} \\ &= \sum \frac{1}{p^s} + \sum_{p\in\mathbb{P},k\ge 2}\frac{1}{kp^{ks}}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{P},k\ge 2}\frac{1}{kp^{ks}} < \sum_{p,k\ge 2}\frac{1}{p^{ks}} &= \sum_p \frac{1}{p^s(p^s-1)} \\ &\le \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1\end{aligned}$$

より第二項は有界。命題 4.4 より $\log\zeta(s) \sim \log\frac{1}{s-1}$ なので、示された。 □

5 Dirichlet L 関数

定義 5.1 (L 関数)**.** $\chi(n)$ を $\bmod m$ の *Dirichlet* 指標[5]とする。このとき次の *Dirichlet* 級数のことを *(Dirichlet* の）*L* 関数と呼ぶ。

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

ここでこの級数に 0 でない寄与を与えるのは m と互いに素な n だけであることに注意してください。

命題 5.2. $\chi=1$ のとき、

$$L(s,1)=F(s)\zeta(s)\quad (F(s)=\prod_{p|m}(1-p^{-s}))$$

特に、$L(s,1)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ の範囲に解析接続され、$s=1$ で 1 位の極を持つ。

これは上の注意および ζ 関数の性質より明らか。

命題 5.3. $\chi\neq 1$ のとき、$L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で収束し正則、$\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束する。また $\mathrm{Re}(s)>1$ では*Euler* 積表示

$$L(s,\chi)=\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

をもつ。

証明. $\mathrm{Re}(s)>1$ での絶対収束およびそのEuler 積表示は命題 3.6 および補題 4.2 より明らか。

$\mathrm{Re}(s)>0$ での収束について考える。（正則性は収束から系 3.3 より直ちに従う）$f_k(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{\chi(n)}{(km+n)^s}$ と定義すると、$L(s,\chi)=f_0(s)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(s)$ で

[5]Dirichlet さんが考え付いたので $\mathrm{mod} m$ での指標をこう呼ぶことがあります。

ある。

$$\begin{aligned}
|f_k(s)| &= \Big|\sum_{n=1}^{m}\chi(n)\Big(\frac{1}{(km+n)^s}-\frac{1}{(km)^s}\Big)\Big| \quad (\chi\neq 1 \text{ より } \sum_{n=1}^{m}\chi(n)=0)\\
&= \Big|\sum_{n=1}^{m}\chi(n)\Big(-\int_{km}^{km+n}\frac{s}{x^{s+1}}dx\Big)\Big|\\
&\le \sum_{n=1}^{m}|\chi(n)|\cdot n\cdot|s|\cdot\Big|\frac{1}{(km)^{s+1}}\Big|\\
&\le \sum_{n=1}^{m} n\cdot\frac{|s|}{m^{\sigma+1}} \quad (\text{ここで } \mathrm{Re}(s)=\sigma \text{とおいた})\\
&= N\cdot\frac{|s|}{m^{\sigma+1}}
\end{aligned}$$

ゆえに明らかに $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ の範囲内で一様収束し、したがって正則となる。（定理 4.4 の証明も参照してください） □

定義 5.4 (ζ_m).

$$\zeta_m(s)=\prod L(s,\chi)$$

但しここで積は $\mathrm{mod}\, m$ の指標全体をわたる。

命題 5.5.

$$\zeta_m(s)=\prod_{p\nmid m}(1-p^{-f(p)^s})^{-g(p)}$$

但し $f(p)$ は $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ における素数 $p\nmid m$ の位数であり、$g(p)=\phi(m)/f(p)$ とする。これは非負係数の *Dirichlet* 級数であり、$\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束する。

証明.

補題 5.6. $p\nmid m$ のとき、T について次の恒等式が成り立つ。

$$\prod_{\chi;\ \mathrm{mod}\ m\ \text{の指標}}(1-\chi(p)T)=(1-T^{f(p)})^{g(p)}$$

証明略（そんなに難しくありませんが、自力で思いつくのは少し努力が要るかも？）

この補題を $T=p^{-s}$ として適用すれば直ちに Euler 積表示は得られる。またこれが非負係数の Dirichlet 級数であることは

$$(1-p^{-f(p)^s})^{-g(p)}=(1+p^{-f(p)s}+p^{-2f(p)s}+\dots)^{g(p)}$$

と展開してみれば明らかに負の項が出てこない（複素数の項も出てこない）ことから分かります。[6] □

次の定理が Dirichlet の算術級数定理を示す上で本質的に重要です。

定理 5.7. **(a)** $\zeta_m(s)$ は $s=1$ で 1 位の極を持つ。

(b) $\chi \neq 1$ に対し、$L(1,\chi) \neq 0$

証明. **(b) ⇒(a)** $L(s,1)$ が $s=1$ で 1 位の極を持つことより、他の指標に対して $L(1,\chi) \neq 0$ ならば ζ_m に対してもこの極は保たれる。($s=1$ での Laurent 展開を考えてみるとすぐ分かる)

(b) 背理法で示す、つまり $L(1,\chi)=0$ となる非自明指標が存在したとする。このとき、$s=1$ において $\zeta_m(s)$ は正則となり、したがって命題 5.2 および 5.3 より $\mathrm{Re}(s)>0$ で正則となる。しかしこれはありえない。今簡単のために $s \in \mathbb{R} > 0$ ととる。このとき

$$(1-p^{-f(p)s})^{-g(p)} = (1+p^{-f(p)s}+p^{-2f(p)s}+\dots) > 1+p^{-\phi(m)s}+p^{-2\phi(m)s}+\dots$$

である。（いくつかの項だけ抜き出してみた）したがって、ζ_m の係数は $\displaystyle\sum_{(n,m)=1} n^{-\phi(m)s}$ のそれよりも大きい。ところが今 $s=1/\phi(m)$ とおいてみるとこの級数は発散する。これは矛盾。

□

6 素数の密度と Dirichlet の定理

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log\frac{1}{s-1} (s\to 1)$$

であることはすでに見た。そこである性質を満たす素数の密度を次のように定義する。

定義 6.1 (密度)**.** $\mathbb{A}$ を $\mathbb{P}$ の部分集合とする。

$$\frac{\sum_{p\in\mathbb{A}}\frac{1}{p^s}}{\log\frac{1}{s-1}} \sim k \in \mathbb{R}\ (s\to 1)$$

であるとき、$\mathbb{A}$ の密度は k であるという。当然、$0\le k\le 1$ である。

[6] 実数も複素数やんとか突っ込まないで下さい。打ち込む量が多くてこっちもしんどいんです。

定理 6.2 (Dirichlet の算術級数定理)**.** $m \geq 1, (a,m)=1$ とする。$\mathbb{P}_a$ を $p \equiv a \pmod m$ なる素数全体の集合とすると、$\mathbb{P}_a$ は密度 $1/\phi(m)$ を持つ。とくに、$\mathbb{P}_a$ は無限集合。

証明. まず、$\log L(s,\chi)$ を考える。$\mathbb{C}$ 上では log は他価関数であるが、そのうち $\log \frac{1}{1-\alpha} = \sum_n \frac{\alpha^n}{n}$ となる分枝をとる。（多分高校数学とマクローリン展開の式だけしか知らない人が計算するとこれが得られます）すると、

$$\begin{aligned}\log L(s,\chi) &= \sum \log \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \quad (\mathrm{Re}(s)>1)\\ &= \sum_{n,p} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}\end{aligned}$$

これと指標の直交関係式（命題 2.45、2.46）より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \overline{\chi}(a) \log L(s,\chi) &= \frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \overline{\chi}(a) \sum_{n,p} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}\\ &= \frac{1}{\phi(m)} \sum_{n,p} \frac{1}{np^{ns}} \sum_\chi \overline{\chi}(a)\chi(p)^n\\ &= \frac{1}{\phi(m)} \sum_{n,p} \frac{1}{np^{ns}} \sum_{\substack{p\\ p^n\equiv a \pmod m}} \phi(m)\\ &= \sum_{\substack{p\\ p^n\equiv a}} \sum_{\substack{n\\ \pmod m}} \frac{1}{np^{ns}}\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}&\sum_{p\equiv a \pmod m} p^{-s} - \frac{1}{\phi(m)} \log L(s,1) =\\ &\qquad \frac{1}{\phi(n)} \sum_{\chi\neq 1} \overline{\chi}(a) \log L(s,\chi) - \sum_{\substack{p\\ p^n\equiv a}} \sum_{\substack{n\geq 2\\ \pmod m}} \frac{1}{np^{ns}}\end{aligned}$$

$s \to 1$ のとき、$\chi \neq 1$ に対して $L(1,\chi) \neq 0$ であったから右辺第一項は有界。また、系 4.5 より右辺第二項も明らかに有界。命題 5.2 より、$L(s,1)$ は $s=1$ で 1 位の極を持つ。ゆえに $\log L(s,1) \sim \log \frac{1}{s-1}$。[7] したがって、

$$\sum_{p\equiv a \pmod m} p^{-s} \sim \frac{1}{\phi(m)} \log L(s,1) \ \sim \frac{1}{\phi(m)} \log \frac{1}{s-1} (s \to 1)$$

[7] $f(z)$ が $z=z_0$ で 1 位の極を持つとき、$f(z) = \frac{1}{z-z_0} \times$ ($z=z_0$ で正則な関数）と書ける。両辺の log をとると $\log f(z) \sim \log \frac{1}{z-z_0} (z \to 1)$ であることは直ちに分かる。

□

7　$\mathbb{Z}[i]$ の場合

証明の方針は $\mathbb{Z}$ のときとまったく同様です。

注意

以下ドイツ文字はすべてイデアルをあらわすものとする。

7.1　Dilichlet 級数

さて、$\mathbb{Z}[i]$ でもとりあえずは $\mathbb{Z}$ みたいに Dirichlet 級数を考えたいわけです。当然 $\mathbb{Z}$ の元についてとっていた和を $\mathbb{Z}[i]$ の元についてとってみるわけです。ところがそのままだと分子に複素数の複素数乗みたいなわけわからんのがでてくるわけです。これは扱いにくいな、と。じゃあ $\mathbb{Z}[i]$ の元に対して定まるもので必ず自然数になるもの、しかもできれば（後のことを考えて）積を保ってくれるものがあればうれしいな…そうだ、「ノルム」があるじゃないか！でもこのままだと Euler 積表示してみようとしてもなんか同伴なやつが何回も登場したりしていやだなあ…そうだ、「イデアル」について和をとろう！[8]

というわけで、$\mathbb{Z}[i]$ における Dirichlet 級数は次の形をしています。

$$\sum_{\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}[i]} \frac{f(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{N\mathfrak{n}=n} f(\mathfrak{n})$$

この書き方から分かるように、明らかに $\mathbb{Z}[i]$ における Dirichlet 級数は $\mathbb{Z}$ における Dirichlet 級数だとみなすことができます。

命題 7.1. $f(n)$ が有界→ $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束

証明. まず次を示す。

補題 7.2. $N(\mathfrak{n}) = n$ となる $\mathfrak{n}$ の個数を $r(n)$ とすると、$r(n) < d(n)$. 但し $d(n)$ は n の約数の個数。

[8] 厳密に言うとノルムはイデアルについて定まる概念なので順番が逆ですが $\mathbb{Z}[i]$ は PID ですし大目にみてやってください

証明.

$$n = 2^m \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{2b_j} \text{ 但し } p_i, q_i \text{は素数}, p_i \equiv 1 \pmod 4\text{、}q_i \equiv 3 \pmod 4$$

の形をした n についてのみ考えればよい。（この形以外は $r(n) = 0$ であることは $\mathfrak{n}$ を素イデアル分解してノルムをとってみればみればすぐに分かる。）このとき $\mathfrak{n} = n$ なる $\mathfrak{n}$ の素イデアル分解には、
π_1 と $\overline{\pi}_1$ があわせて a_1 回、
π_2 と $\overline{\pi}_2$ があわせて a_2 回、
$\vdots$
π_k と $\overline{\pi}_k$ があわせて a_k 回、
$\mathfrak{q}_1$ が b_1 回、
$\vdots$
$\mathfrak{q}_l$ が b_l 回
登場する。（但しここで π_i は $N\pi_i = p_i$ なる素イデアル、$\mathfrak{q}_i$ は $N\mathfrak{q}_i = q_i^2$ なる素イデアル。）よって $\mathfrak{n}$ のとり方を考えて

$$r(n) = \prod_{i=1}^{k}(a_i + 1) < \prod_{i=1}^{k}(a_i + 1)\prod_{j=1}^{l}(2b_j + 1) = d(n)$$

$\square$

補題 7.3.

$$d(n) = O(x^\delta)(\delta > 0 \text{ は任意})$$

証明.

$$\frac{d(n)}{n^\delta} = \prod_{i=1}^{r}(\frac{a_i + 1}{p_i^{a_i\delta}})$$

である。（小学校の算数でもやった「約数の個数の求め方」を思い出してみましょう。

$$a\delta \log 2 \le e^{a\delta \log 2} = 2^{a\delta} \le p^{a\delta}$$

であるから、

$$\frac{a+1}{p^{a\delta}} \le 1 + \frac{a}{p^{a\delta}} \le 1 + \frac{1}{\delta \log 2} \le \exp(\frac{1}{\delta \log 2})$$

ここで $1+x<e^x$ $(x>0)$ を用いた。これを最初に式の $2^{\frac{1}{\delta}}$ より小さい p について用いる。このような素数の個数は $2^{\frac{1}{\delta}}$ より小さい。$p \geq 2^{\frac{1}{\delta}}$ ならば、

$$p^\delta \geq 2, \frac{a+1}{p^{a\delta}} \leq \frac{a+1}{2^a} \leq 1$$

ゆえに、

$$\frac{d(n)}{n^\delta} \leq \prod_{p \leq 2^{1/\delta}} \exp(\frac{1}{\delta \log 2}) < \exp(\frac{2^{1/\delta}}{\delta \log 2}) = O(1)$$

(最後の項は n によらないことに注意)。ゆえに示された。 □

この二つの補題より直ちに命題 7.1 は示される。

f は有界なので、$|f(\mathfrak{n})| < k$ とおく。すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{N\mathfrak{n}=n} |f(\mathfrak{n})| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{kr(n)}{n^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{kd(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} O(\frac{n^\delta}{n^s})$$

ここで $\delta > 0$ は任意だから、$\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して右辺は絶対収束する。したがって左辺も同様。 □

命題 7.4. f を有界な乗法的関数とする。[9]このとき $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して、

$$\sum_{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}[i]} \frac{f(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\pi:\text{素イデアル}} (1 + \frac{f(\pi)}{N\pi^s} + \frac{f(\pi^2)}{N\pi^{2s}} + \dots)$$
$$= \prod_{\pi} (1 - \frac{f(\pi)}{N\pi^s})^{-1}$$

ただし 2 行目は f が完全乗法的で任意の素イデアル π に対して $|f(\pi)| < |N\pi^s|$ となるときに成り立ちます。

7.2 ζ 関数

定義 7.5 ($\mathbb{Z}[i]$ におけるζ)**.**

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \sum_{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}[i]} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}$$

と定義する。*7.1* の内容から明らかにこれは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し、*Euler* 積表示

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \sum_{\pi} (1 - N\pi^{-s})^{-1}$$

を持つ。

[9] 乗法的関数の定義は $\mathbb{Z}$ のときと同様です。但し定義域が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}[i]$ のイデアルに変わります。

命題 7.6. **(a)** $\mathrm{Re}(s) > 1$ で

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$$

但しここで χ は mod4 の非自明指標。

すなわち $\chi(1 \bmod 4) = 1, \chi(3 \bmod 4) = -1$ である。

(b) $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ の範囲に解析接続され、$s = 1$ で留数 $\pi/4$ の 1 位の極を持つ。

証明. **(a)**

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) &= \prod_{\pi}(1 - \frac{1}{N\pi^s})^{-1} \\
&= (1-2^{-s})^{-1} \prod_{p \equiv 1 \pmod 4}(1 - \frac{1}{p^s})^{-2} \prod_{q \equiv 3 \pmod 4}(1 - \frac{1}{q^{2s}})^{-1} \\
&= \zeta(s) \prod_{p \equiv 1 \pmod 4}(1 - p^{-s})^{-1} \prod_{q \equiv 3 \pmod 4}(1 + q^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

ここで右辺（の $\zeta(s)$ を除いた部分）をじっと見ます。$L(s,\chi)$ の Euler 積展開の式もあわせて見ます。するとこれがまさしく χを mod 4 の非自明指標ととったときの $L(s,\chi)$ の Euler 積に他ならないことが分かります。

$$= \zeta(s)L(s,\chi)$$

(b) $\zeta(s)$ は命題 4.4 より $\mathrm{Re}(s) > 0$ に解析接続され、$s = 1$ で 1 位の極を持つ。また命題 5.3 より、$L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則。ゆえに $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$ はこの範囲に解析接続される。また、$s = 1$ における留数は、

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to 1}(s-1)\zeta(s)L(s,\chi) &= 1 \cdot L(1,\chi) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ここで最後の等号はグレゴリーの公式（円周率を求める公式の一つ）などによる。$\tan^{-1}$ を Taylor 展開したりしても得られる。[10]

□

[10] $\tan^{-1}$ の Taylor 展開って $|x| < 1$ でしか使えないから実はこれは微妙…だったっけ？忘れました。ぶっちゃけ留数の値は今後使わないのでどうでもいいです。

命題 7.7. $s \to 1$ のとき $\displaystyle\sum_{\pi:\text{素イデアル}} \frac{1}{N\pi^s} \sim \log\frac{1}{s-1}$

証明.

$$\begin{aligned}\sum_{\pi}\frac{1}{N\pi^s} &= 2\sum_{p\equiv 1 \pmod 4}\frac{1}{p^s} + \sum_{p\equiv 3 \pmod 4}\frac{1}{q^{2s}}\\ &\sim 2\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1}{s-1} + O(1)\ (\text{定理 6.2 および系 4.5 より})\\ &\sim \log\frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

□

7.3 L 関数

定義 7.8 (L 関数)**.** χ を $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ の *Dirichlet* 指標とする。

$$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

命題 7.9. $\chi = 1$ のとき、

$$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,1) = H(s)\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) \quad (H(s) = \prod_{\pi|\mathfrak{m}}(1-N\pi^{-s})$$

特に、$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,1)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ に解析接続され、$s = 1$ で *1* 位の極を持つ。

これは命題 5.2 とまったく同様に分かります。

命題 7.10. $\chi \neq 1$ のとき、$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ で収束して正則、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束、この範囲で *Euler* 積表示

$$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi) = \prod_{\pi}(1-\chi(\pi)N\pi^{-s})^{-1}$$

をもつ。

証明. 絶対収束、Euler 積表示は略。$\mathrm{Re}(s) > 1/2$ での収束だけ示す。なお証明の基本的な方針は $\mathbb{Z}$ のときと同じなので命題 5.3 の証明と比較しながら読むと分かりやすいと思います。

$f_{\mathfrak{a}}(s) = \displaystyle\sum_{\mathfrak{n}\in(\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{m}\ \mathbb{Z}[i])}\frac{\chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^s}$ とおくと、

$$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{Z}[i]} f_{\mathfrak{a}}(s) = f_0(s) + \sum_{\mathfrak{a}\neq 0} f_{\mathfrak{a}}(s)$$

以下で $f_{\mathfrak{a}}(s) \leq c \cdot \dfrac{|s|}{N\mathfrak{a}^{\mathrm{Re}(s)+1/2}}$ を示す。（当然 c は定数）これが示されたら、$\sum f_{\mathfrak{a}}(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ 上の任意のコンパクト集合で一様収束することが分かり、したがって $L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi)$ は収束して正則である。

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \left(\frac{\chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^s} - \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{a}\ \mathfrak{m})^s}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N(\mathfrak{a}\ \mathfrak{m}+\mathfrak{n})^s} - \frac{1}{N(\mathfrak{a}\ \mathfrak{m})^s}\right| &\leq \left|\int_{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m})}^{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}\ +\mathfrak{n})} \frac{s}{x^{s+1}}dx\right| \\
&\leq \frac{|s| \cdot \alpha \cdot (N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n}) - N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}))}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m})^{\mathrm{Re}(s)+1}} \\
&\leq \frac{|s|\alpha}{N(\mathfrak{a})^{\mathrm{Re}(s)+1}} \cdot O(N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq c \cdot \frac{|s|}{N\mathfrak{a}^{\mathrm{Re}(s)+1/2}}
\end{aligned}$$

ここで、α は $g(\mathfrak{a},\mathfrak{n}) = \dfrac{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}$ の最大値よりも大きくとる。（分子が決して 0 にはならないように $\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{m}\mathbb{Z}[i]$ の代表系を採れば、明らかに $N\mathfrak{a} \to \infty$ で $g \to 1$ だから、g の最大値は存在する。（$\mathfrak{n}$ の採り方は有限であることに注意））

また、

$$\begin{aligned}
|N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n}) - N(\mathfrak{a}\mathfrak{m})| &= (|\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n}| - |\mathfrak{a}\mathfrak{m}|)\big||\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n}| + |\mathfrak{a}\mathfrak{m}|\big| \\
&< |\mathfrak{n}|O(|\mathfrak{a}\mathfrak{m}|) \\
&= O(N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

で $|N(\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{n}) - N(\mathfrak{a}\mathfrak{m})|$ を抑えています。[11] □

定義 7.11.

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s) = \prod_{\chi;\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{m}\ \text{の指標}} L(s,\chi)$$

命題 7.12.

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s) = \prod_{\nmid \mathfrak{m}} (1 - N\pi^{-f(\pi)^s})^{-g(\pi)}$$

[11] 本当はイデアルについて絶対値という概念は（僕の知る限り）考えません。したがってここでは単項イデアル整域である $\mathbb{Z}[i]$ のその単項イデアルの生成元、さらにぶっちゃければガウス整数について絶対値を取っています。

但し $f(\pi)$ は $(\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{m}\mathbb{Z}[i])^*$ における素イデアル $\pi \nmid \mathfrak{m}$ の位数であり、$g(\pi) = \phi(\mathfrak{m})/f(\pi)$ とする。これは非負係数の *Dirichlet* 級数であり、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束する。

証明. 基本的に $\mathbb{Z}$ の場合（命題 5.5）とまったく同様にできます。 □

命題 7.13. $\chi \neq 1$ に対し、$L(1,\chi) \neq 0$。

証明. $\mathbb{Z}$ のときとは少し趣向を変えてみます。（すべては $L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi)$ の $\mathrm{Re}(s) > 0$ での収束を示せなかったせい）

χ が虚（$\chi \neq \overline{\chi}$ のとき） $\chi \neq 1$ のとき $L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi)$ が $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ で正則、$L_{\mathbb{Q}(i)}(s,1)$ は $s=1$ で 1 位の極を持つことから、$\zeta_{\mathfrak{m}}(s)$ は $s=1$ で高々 1 位の極を持つ。（極を持たないかもしれない。）そして $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ 上の他の点では正則。

さて、$L_{\mathbb{Q}(i)}(1,\chi) = 0$ とすると、$L_{\mathbb{Q}(i)}(1,\overline{\chi}) = \overline{L_{\mathbb{Q}(i)}(1,\chi)}$ であり、χ が虚と仮定しているので、

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s) = L_{\mathbb{Q}(i)}(s,1) \times L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi) \times L(s,\overline{\chi}) \times (s=1 \text{ で正則な関数})$$

は $s=1$ で 1 位以上の零点を持つ。すなわち、$\zeta_{\mathfrak{m}}(1) = 0$。しかしこれは、$\zeta_{\mathfrak{m}}$ が非負係数の Dirichlet 級数であることからありえない。（全て係数が 0 ということも Euler 積の形から当然ありえない）

χ が実（$\chi = \overline{\chi}$ のとき） $L(1,\chi) = 0$ と仮定し、次のように $G(s)$ をとる（1 行目が定義式）

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{L_{\mathbb{Q}(i)}(s,\chi)L_{\mathbb{Q}(i)}(s,1)}{L_{\mathbb{Q}(i)}(2s,1)} \\
&= \prod_{\pi}(1-\frac{\chi(\pi)}{N\pi^s})^{-1} \cdot (1-\frac{1}{N\pi^s})^{-1} \cdot (1-\frac{1}{N\pi^{2s}}) \\
&= \prod_{\pi} \frac{1+N\pi^{-s}}{1-\chi(\pi)N\pi^{-s}} \\
&= \prod_{\chi(\pi)=1} \frac{1+N\pi^{-s}}{1-N\pi^{-s}} \ (\chi\text{が実であることに注意！}) \\
&= \sum_{\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{n}} N\mathfrak{n}^{-s}
\end{aligned}$$

これは $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で正則で、$s \to \frac{1}{2}$ のとき $G(s) \to 0$.($s=1$ での $L_{\mathbb{Q}(i)}(s,1)$ の極が $L_{\mathbb{Q}(i)}(1,\chi) = 0$ であることにより ”消える ”ことに注意してください)

また、$(1-N\pi^{-s})^{-1} = 1+N\pi^{-s}+N\pi^{-2s}+\dots$ より、$a_{\mathfrak{n}}$ は非負です。特に $a_1=1$ です。したがって今 s を実数に固定すると、(これは複素平面での収束が「どのような近づき方をしても」一定の値に収束することを必要とすることから正当化されます。) $1/2<s<2$ において

$$G(s) \geq G(2) = \sum_{\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{n}} N\mathfrak{n}^{-2} \geq \frac{a_1}{1^2} = 1$$

これは $G(s) \to 0 (s \to 1/2)$ に矛盾。

□

7.4 密度と Dirichlet の算術級数定理 in $\mathbb{Z}[i]$

もう主定理は目と鼻の先です!

定義 7.14 (密度). $\mathbb{A}$ を素イデアルからなる集合とする。

$$\frac{\sum_{\pi\in\mathbb{A}} \frac{1}{p^s}}{\log\frac{1}{s-1}} \sim k \in \mathbb{R}\ (s \to 1)$$

であるとき、$\mathbb{A}$ の密度は k であるという。当然、$0 \leq k \leq 1$ である。

定理 7.15 ($\mathbb{Z}[i]$ における Dirichlet の算術級数定理). $N\mathfrak{m} \geq 1, \mathfrak{m}$ と $\mathfrak{a}$ は互いに素とする。$\Pi_{\mathfrak{a}}$ を $\pi \equiv \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{m}}$ なる素イデアル全体の集合とすると、$\Pi_{\mathfrak{a}}$ は密度 $1/\phi(\mathfrak{m})$ を持つ。とくに、$\Pi_{\mathfrak{a}}$ は無限集合。

証明略

主定理の証明を略してしまいました(笑)でも定理 6.2 の証明とまったく同一なので、ここまで読んできた人にとってはむしろ省略してもらいたいくらいでしょう。

8 あとがき

ふぅ〜疲れた…

こんなに疲れた部誌は初めてです。やっと書き終わった締切前夜の午前 3 時。でもこれを全部読んだ読者の方はきっとこれくらいは疲れているでしょう。(特に何の予備知識もない方)でも Dirichlet の定理はとってもいい定理だと思うので、ぜひ読み通してください。大学入試なんかでも「あ、Dirichlet の定理よりこんな素数がとれるから…」みたいな議論ができるときがあるか

もしれないと思います。一応高校数学の知識＋整数論をかじったことがある意欲のある理系の高校生が読めるように努力はしてみました。

実は Dirichlet の定理は $\mathbb{Z}[i]$ でだけでなく、他の代数体でも成り立ちます。興味を持った方は勉強してみてはいかかでしょうか？

この部誌を読んだ感想、間違いの指摘などは `s.genki0605@gmail.com` までどうぞ。

参考文献

[1] G.H.Hardy,E.M.Wright「数論入門 I,II」（シュプリンガー数学クラシックス, 2001）

[2] T.M.Apostol *Introduction to Analytic Number Theory* (Springer,1976)

[3] Jean-Pierre Serre *A Course in Arithmetic* (Springer,1973)

[4] 高木貞治「解析概論」（岩波書店、1983）

[5] 加藤和也, 黒川信重, 斉藤毅 「数論 I -Fermat の夢と類体論」（岩波書店,2005）

[6] R.v.Churchill,J.W.Brown 「複素関数入門」（数学書房,1989）