様々な図形における彩色問題

高校2年1組36番　城下慎也

0　はじめに

本日は数学研究部までお越しいただいてありがとうございます。

今回は平面彩色問題、そして球やトーラス、メビウスの帯などでの彩色問題について研究しました。平面彩色問題とは4色問題などで有名な地図塗り分け問題のことです。今回の記事ではグラフ理論を使った証明が出てきますが、あまりグラフ理論に馴染みがない方でも簡単に読める内容になっていると思います。

1　定義

ここでは今回の記事に出てくるグラフ理論や後々に出てくるいくつかの図形に関する言葉の定義を簡単にまとめておきます。

グラフ いくつかの頂点といくつかの辺でできた図形。辺に向きが付いているものを有向グラフ、付いていないものを無向グラフと呼ぶ。今回は無向グラフのみ使う。

完全グラフ どの2頂点間も辺で結ばれているグラフ (図1.1)。

平面グラフ どの2辺も頂点以外で交わっていないグラフ。

単純グラフ どの2頂点間も2本以上の辺で直接結ばれていなく、同一の頂点自身を結んだ辺が存在しないグラフ。

連結グラフ グラフ内のどの2頂点間も1本以上の辺を辿ることによって行くことができるグラフ (図1.2は単純連結平面グラフである)。

2部グラフ 2つの頂点の集合があり、一方の頂点の集合から他方の頂点の集合にのみ辺が存在するグラフ (図1.3)。

木 閉路を1つも含まない連結グラフ (図1.4)。n 個の頂点を持つ木はちょうど $n-1$ 本の辺を持つ。また木に含まれるどの2頂点間もただ1通りの辿り方がある。

次数 ある頂点 v における v を端点とする辺の本数を v の次数と呼ぶ。

帯 平面の両端をそのまま繋ぎ合わせた図形 (図 1.5)。
トーラス 帯の両端の縁をそのまま繋ぎ合わせた図形 (図 1.6)。
メビウスの帯 平面の両端をねじって繋ぎ合わせた図形 (図 1.7)。
クラインの壷 帯の両端の縁を自己交差させて繋ぎ合わせた図形 (図 1.8)。

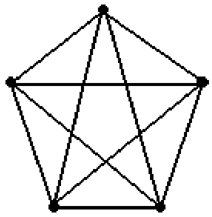

図1.1

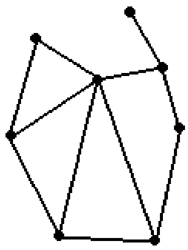

図1.2

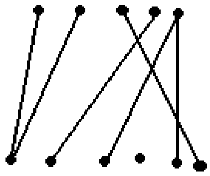

図1.3

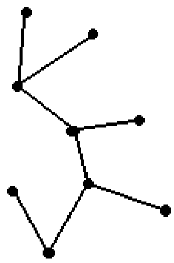

図1.4

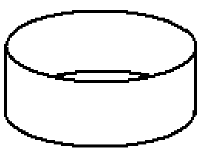

図1.5

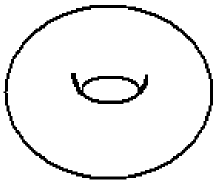

図1.6

図1.7

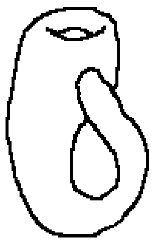

図1.8

2　5彩色定理

ここでは平面での彩色問題について扱います。平面彩色問題とは、いくつかの飛び地を持たない地域とその位置関係が与えられた時に、

「それらの地域を最低何色でどの隣接する地域も異なる色で彩色可能か？」

ということについて考える問題です。これは、

「任意の単純な平面グラフについて、辺で結ばれているどの頂点同士も異なる色で彩色可能か？」

という問題に言いかえられます。この問題は 4 色問題として有名ですが、その中でも証明が簡潔な 5 彩色定理について調べようと思います。

まずは以下のことについて示します。

定理 2.1　木のグラフは 2 彩色可能である。

証明　木の任意の頂点 v を 1 つとって、その頂点から他の頂点 w に対して、何本の辺を辿って行けたかを頂点 w の深さとする。また、頂点 v の深さを 0 とする。この時深さが奇数の頂点を色 1、そうでない頂点を色 2 で彩色すれば充分であることを示す。今、ある頂点 w が深さ n であったとする。この時、もし w と隣接しているある頂点 x が深さ m(m は $n-1$ でも $n+1$ でもない) を持っていた場合、x から w に行く経路および w から x に行く経路のどちらにおいても w が n 以外の深さを示すことになり、木のグラフが閉路を含まないということに反する。よって w に隣接している頂点は全て深さが $n-1$ または $n+1$ となる。これらの頂点は w と深さの偶奇が異なるので異なった色で彩色される。ゆえに題意は示された。□

定理 2.2　任意の単純平面グラフは、次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ。

証明　頂点の数が 6 以下ならば自明なので頂点の数が 7 以上の時を考える。まずは以下の補題を示す。

補題 2.3　任意の単純連結平面グラフ G において、頂点の数を $\nu(G)$、辺の数を $\varepsilon(G)$、分けられた領域 (面) の個数 (最外部も含む) を $\phi(G)$ とした時、

$$\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = 2$$

が成り立つ (オイラーの公式)。

補題の証明　$\phi(G)$ に関する帰納法で示す。

(i) $\phi(G) = 1$ の時
グラフ G は木になるので、

$$\begin{aligned}\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) &= \nu(G) - \{\nu(G) - 1\} + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

より、$\phi(G) = 1$ において成り立つ。

(ii) $\phi(G) = k (k \in \mathbb{N})$ の時に成立すると仮定した時、$\phi(G) = k + 1$ の時にも成立することを示す。
$\phi(G) = k + 1$ の時、$\phi(G)$ からある面を構成する辺の 1 つ e を除いたものを

グラフ $G-e$ とした時、

$$\nu(G-e)=\nu(G) \quad \varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1 \quad \phi(G-e)=\phi(G)-1 \tag{1}$$

が成り立つので、$\phi(G-e)=k$ より帰納法の仮定から

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2$$

が成り立ち、これに (1) を代入すると

$$\begin{aligned}\nu(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)&=\nu(G-e)-\{\nu(G-e)-1\}+\{\phi(G-e)+1\}\\&=2\end{aligned}$$

となる。よって $\phi(G)=k+1$ の時も成り立ち、(i)(ii) から数学的帰納法により補題は示された。□

さて、定理 2.2 におけるグラフが分割する領域の数を ϕ とすると、頂点の数が 4 以上ならばどの領域も 3 本以上の辺を持つので、グラフの頂点の数を ν、辺の数を ε とした時、各辺をちょうど 2 つの面が共有するので、

$$3\phi \leqq 2\varepsilon \Leftrightarrow \phi \leqq \frac{2}{3}\varepsilon$$

が成り立つ。補題 2.3 より、

$$\nu-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon \geqq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leqq 3\nu-6 \tag{2}$$

となる。もし、どの頂点も次数が 6 以上ならば、

$$2\varepsilon \geqq 6\nu \Leftrightarrow \varepsilon \geqq 3\nu$$

となるが、これは (2) に反する。ゆえに題意は示された。□

定理 2.4　頂点の数が 5 の完全グラフは平面グラフではない。

証明　(2) の式より頂点の数が 5 の平面グラフならば辺の数 ε が

$$\varepsilon \leqq 3\cdot 5-6=9 \tag{3}$$

となるはずである。しかし頂点の数が 5 の完全グラフでは、全ての頂点の次数が 4 なので、

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10$$

が成り立つはずである。しかしこれは (3) に反するので題意は示された。□

いよいよ本題に入ります。連結していないグラフ同士はお互いに影響しないので連結グラフについてのみ考えます。

定理 2.5　単純連結平面グラフ G は 5 彩色可能である。

証明　頂点の数に関する帰納法で示す。頂点の数を ν とした時、

(i)$\nu \leqq 5$ の時

全ての頂点に異なる色を塗ればいいので成立。

(ii)$\nu \leqq k (k \in \mathbb{N})$ の時に成立すると仮定したとき、$\nu = k+1$ の時に成立することを示す。

グラフ G から適当な頂点 v を除外した時を考える。v を含む連結グラフに関して、

[i]v を除いた後のグラフが 2 つ以上の連結グラフに分かれる時

それぞれの連結成分を構成する頂点の個数は $k-1$ 以下となるのでそれぞれの連結成分は v を含めても頂点の個数が k 以下となり、帰納法の仮定から 5 彩色可能である。各連結成分ごとに頂点 v に塗る色を統一することができるので、v を加えても 5 彩色可能である。

[ii]v を除いてもグラフ全体が連結グラフになる時

定理 2.2 より v をうまく選び直せば、[i] の状況または v の次数を 5 以下に減らすことができる。この条件を満たす v で 5 彩色可能なことを示す。

・[i] になる時

上記の説明より成立するのは明らか。

・v の次数が 4 以下の時

v に隣接しているどの頂点も使用していない色が少なくとも 1 色出るので、v にその色を塗れば成り立つ。

・v の次数が 5 の時

v に隣接している頂点をそれぞれ $w_1, w_2, ..., w_5$ とし、それぞれに色 1,2,3,4,5 が塗られているものとする。それ以外の場合は v に塗る色があるので考えない。定理 2.1 よりグラフをいくつかの頂点で分割し、それぞれが木に分割されたものを考えた時、それらの木を 1 本の辺として扱ってよい。なぜなら、分割された木の両端 2 点以外の頂点がある場合はその木の両端点に塗られている色以外の 2 色で彩色できる ($\because$ 定理 2.1)。もし両端が同一の色で塗られている場合は選択肢の幅が減るが、変換した後にできたグラフで定理が示されれば当然元の木でも定理が成り立つので問題ない。以下、この変換が行われた後の状態を考える。この時、定理 2.4 よりこのグラフは完全グラフには

なりえないので、ある 2 頂点間 (これを w_1, w_2 とする) において、

・w_1 と w_2 の間の経路がない。

・w_1 と w_2 の間の経路が他の頂点同士の経路 (これを w_3, w_4 とする) と交わる。

のどちらかが成立する。前者だと [i] と同様の状態になるため矛盾。後者だと w_1 と w_2 の間の経路と w_3 と w_4 の間の経路が共有する頂点 x が存在するはずである。x にはどれか 1 つの色が塗られているため、たとえ共有する頂点 x が複数あったとしても、w_1 と w_2 の間の経路と w_3 と w_4 のうち少なくとも一方は異なった色 (w_1 と w_2 にとっての色 3,4,5、w_3 と w_4 にとっての色 1,2,5) によって分断されているはずである。その色の集合を境界として片方の色を反転させれば、条件に反することもなく色 1,2,3,4 のうちどれかが使われなくなるようにでき、結果 [ii] のケースでも 5 彩色可能である。

よって [i][ii] より (ii) が成り立ち、(i)(ii) より数学的帰納法から題意は示された。□

3　帯, 球, トーラスでの彩色

以下、平面グラフを 4 彩色可能なものとした場合に帯、球、トーラス上のグラフでは何色で彩色できるかを考えます。その図形上の単純連結平面グラフにおいての彩色数はその図形上の一般の単純な平面グラフにおいても最適解になるので単純連結平面グラフについてのみ考えます。

定理 3.1　帯上の単純連結平面グラフは 4 彩色可能である。

証明　帯の両側の縁のうち一方を縮小し、他方を拡張することによって帯は平面上に描かれたトーラスの形にできる。これは通常の平面グラフと同様に扱えるので、4 彩色可能である。□

定理 3.2　球上の単純連結平面グラフは 4 彩色可能である。

証明　球上の平面グラフから 1 頂点除いたものは通常の平面グラフとして扱える。今除いた 1 頂点は残りのグラフの最も外側にある頂点と結ばれたものなので結局は通常の平面グラフとして扱うことができるので、4 彩色可能である。□

定理 3.3　図 3.1 のような輪とその外側にのみ辺が存在する単純連結平面グラフのうち、輪を構成している頂点は 3 彩色可能である。

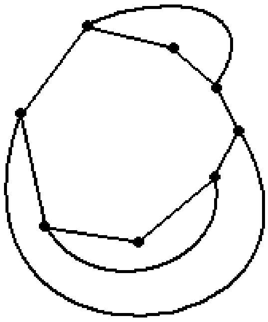

図3.1

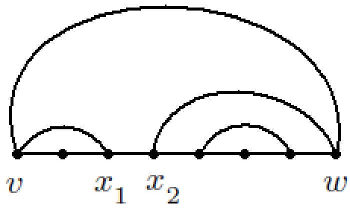

図3.2

証明　まず、グラフの 1 頂点を基準に取り、その頂点から時計回りに展開していったもの (図 3.2) を考える。これが 3 彩色可能であることを示すには以下の補題を示せばよい。

補題 3.4　図 3.2 のように展開したものの両端点を v, w とし、v と w を結んだ辺を辺 vw とした時、辺 vw の直下に n 個の頂点 $x_1, x_2, ..., x_n$ が辺 $vx_1, x_1x_2, ..., x_{n-1}x_n, x_nw$ を構成していた時、これらの頂点は 3 彩色可能である。

補題の証明　上記の辺を全て合わせたものは 1 つの輪を形成する。輪の彩色は、

(i) 輪の頂点数が偶数の時

色 1,2 を交互に塗る。

(ii) 輪の頂点数が奇数の時

色 3 を 1 頂点に、残りの頂点に色 1,2 を交互に塗る。

という操作によって 3 彩色可能である。ゆえに補題は示された。 □

さて、補題 3.4 より初期条件からより小さいいくつかの小問題に分割することができる。補題の証明に書かれている色 1,2,3 は入れ替えが可能なのでこれらの小問題も補題 3.4 により 3 彩色可能である (∵ これらのどの小問題においても小問題の両端を構成する頂点にしか色が塗られていない)。頂点の数は有限なので、この操作を繰り返すことによって全ての頂点を 3 色で塗ることができる。ゆえに題意は示された。 □

定理 3.5　トーラス上の単純連結平面グラフは 7 彩色可能である。

証明　以下の 2 つの場合に分けて証明します。

(i) トーラス上の 1 つないし 2 つの頂点が表面を 1 周している時
それらの頂点は 2 色以下で彩色でき、またそれらの領域によってトーラスが 1 つの帯に分断される。定理 3.1 より帯上の平面グラフは 4 彩色可能なので合わせても 6 彩色可能である。

(ii)(i) の条件を満たさない時
トーラスは帯の両端を繋ぎ合わせたものなので一度帯の状態に分割して (図 3.3) 考える。この時、定理 3.1 よりこのグラフは 4 彩色可能である。この時、帯の両端を繋ぎ合わせるという行為は、このグラフの最も内側の輪 (斜線部分) と最も外側の輪を構成する頂点を辺で結ぶ行為に等しい。よって内側の輪の頂点に先に使用した 4 色とは異なった 3 色で彩色すればよく、定理 3.3 より 3 彩色可能なので、全体として 7 彩色可能である。

(i)(ii) より題意は示された。□

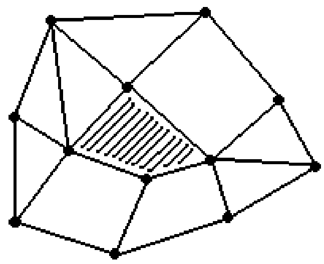

図3.3

4　メビウスの帯, クラインの壺での彩色

最後にメビウスの帯やクラインの壺での彩色について考えます。但し 2 つのルールを追加します。1 つは、

「図形上の全ての場所において表側と裏側が同一の色で塗られていなければならない」

というのもこのルールを適用しなければメビウスの帯がただの長い 1 つの帯になってしまうからです。ちなみにこのルールを適用した場合、図 4.1 の例において (上下をねじって貼り合わせる)、6 色必要になります。もう 1 つは、

「自己交差している領域同士は隣接していない」

これはクラインの壺にのみ適用されるルールです。では証明に入ります。

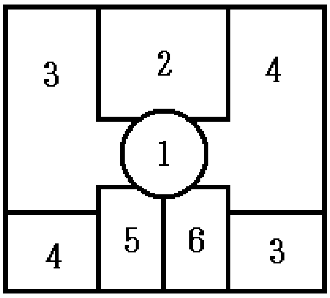

図4.1

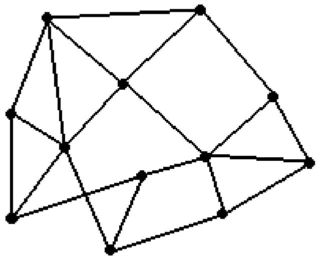

図4.2

定理 4.1　クラインの壺上の単純連結平面グラフは 7 彩色可能である。

証明　クラインの壺は帯の両端を自己交差するように繋いだものなのでトーラスと同じように扱える。定理 3.5 よりクラインの壺上でも 7 彩色可能である。□

定理 4.2　メビウスの帯上の単純連結平面グラフは 6 彩色可能である。

証明　章の最初の説明により 5 色以下では不可能である。6 色で充分なことを示す。頂点の数が 6 個以下だと自明なので、頂点の数が 7 個以上の場合を考える。まず、以下の補題を示す。

補題 4.3　メビウスの帯上の単純連結平面グラフには次数が 5 以下の頂点が少なくとも 1 つ存在する。

補題の証明　メビウスの帯を平面上に表すと、図 4.2 のように一部が重なったグラフができる。図 4.2 の辺が重なった部分は 2 部グラフである。この時、メビウスの帯の定義よりこの 2 部グラフの片側の全ての頂点が反転するように (左から i 番目の頂点から右から i 番目の頂点に結ぶように辺を変更するように) グラフを繋ぎ直すとこのグラフは平面グラフ (帯) となる。よってこの平面グラフは定理 2.3 の (2) より、元々のメビウスの帯上のグラフの頂点の数を n 個とした時に、この平面グラフに存在する辺の数 ε は、

$$\varepsilon \leqq 3n - 6 \tag{4}$$

を満たす。上記の操作によって辺の本数が増減することはないので、元々のメビウスの帯上のグラフの辺の本数は ε に等しい。もし全ての頂点の次数が

6 以上ならば、定理 2.2 と同様に、ε は

$$2\varepsilon \geqq 6\nu \Leftrightarrow \varepsilon \geqq 3\nu$$

を満たさなければならないが、これは (4) に反する。よって題意は示された。
□

さて、この定理が正しいことを頂点の個数についての帰納法によって示す。頂点の数を n 個とした時に、

(i)$n \leqq 6$ の時

全ての頂点に異なる色を塗ればいいので成立。

(ii)$n \leqq k(k \in \mathbb{N})$ の時に成立すると仮定した時に $n = k + 1$ の時にも成立することを示す。

補題 4.3 よりこの $k + 1$ 個の頂点のうちには、次数が 5 以下の頂点が少なくとも 1 つ存在する。これを頂点 v とする。この時、頂点 v を除いたグラフは頂点の個数が k 個なので帰納法の仮定により 6 彩色可能である。さて、頂点 v の次数は 5 以下なのでこの頂点に隣接するどの頂点も使用していない色が少なくとも 1 色出てくるので、頂点 v にその色を塗ればよく、$n = k + 1$ の時でも成立する。

(i)(ii) より数学的帰納法から題意は示された。 □

5　おわりに

いかがだったでしょうか。グラフ理論は少々特殊な分野で、情報数学の範囲でよく見かける分野ですが (実際に 4 色定理の証明にはコンピューターが使われた)、この記事を読んで少しでもグラフ理論に興味を持っていただければ幸いです。

最後になりましたがこの文章を校正してくれた部員の方々、そしてこの記事を最後まで読んでくださった皆様、本当にありがとうございました。

参考文献

[1] グラフ理論入門―平面グラフへの応用 (落合豊行著　日本評論社出版)