1 の n 乗根について

高校 2 年 2 組 18 番　本田　貴大

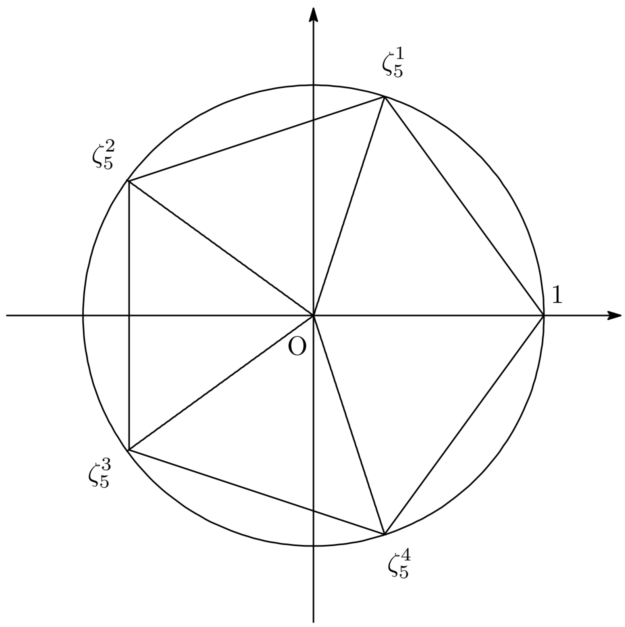
1　はじめに

本日は、灘校数学研究部にお越しいただき、ありがとうございます。
他の記事が難しくて、読むのを諦めようと思ったあなたには、この記事を読むことをお勧めします。中学生でも十分に読めるようにしたつもりです。
この記事では 1 の n 乗根の和について書きたいと思います。整った文章にはなっていませんが、ご了承ください。

2　1 の n 乗根の和

複素平面で考えてみると明らかに 0 になりそうです。

例 2.1. 1 の 5 乗根の場合



定理 2.2. $n \in \mathbb{N}$ で、$n \geqq 2$ ならば、

$$\sum_{k=0}^{n-1} {\zeta_n}^k = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} {\zeta_n}^k = -1 \tag{2}$$

但し、ζ_n は 1 の原始 n 乗根とする。

証明. 1 の n 乗根とは、

$$x^n - 1 = 0$$

の解である。また、その解は、ζ_n^0 , $\zeta_n^1 \ldots, \zeta_n^{n-1}$。つまり、

$$\begin{aligned}(x-\zeta_n^0)(x-\zeta_n^1)\ldots(x-\zeta_n^{n-1}) &= x^n - (\zeta_n^0 + \cdots + \zeta_n^{n-1})x^{n-1} + \ldots \\ &= x^n - 1\end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より、 $\zeta_n^0 + \zeta_n^1 + \cdots + \zeta_n^{n-1} = 0$ □

定理 2.2 の (2) は次章でよく使います。

3　1 の原始 n 乗根の和

前章では 1 の n 乗根の全ての和を扱いましたが、この章では、1 の原始 n 乗根だけの和を扱います。

$$f(n) = \sum_{\substack{(d,n)=1 \\ 1 \leq d \leq n}} \zeta_n^d$$

と定義します。

3.1　n が素数のとき

この時、自明に -1 です。*(∵**定理** 2.2)*

3.2　n が異なる 2 個の積のとき

$n = pq$ とすると、1 の全ての n 乗根 (1 を除く) から p 乗根と q 乗根を除いたものになります。なので、
$f(n) = (-1) - (-1) - (-1) = 1$ になります。

3.3　n が異なる 3 個の素数の積のとき

$n = pqr$ とすると、1 の全ての n 乗根から pq, qr, rp 乗根を除き、p, q, r 乗根を加えたものになります。なので、
$f(n) = (-1) - 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -1$ になります。

3.4　n が異なる k 個の素数の積のとき

3.3 の議論から推測できるように、1 の n 乗根の和は、

$$(-1) +_k C_1 -_k C_2 +_k C_3 - \cdots$$

となります。3.2 や 3.3 での議論を参考にすると、k を偶数か奇数かで場合分けをする必要がありそうです。

3.4.1　k が偶数

$$(-1) +_2 C_1$$

$$(-1) +_4 C_1 -_4 C_2 +_4 C_3$$

$$(-1) +_6 C_1 -_6 C_2 +_6 C_3 -_6 C_4 +_6 C_5$$

これを見ると二項定理が使えそうだなぁと思います。

$$(x-1)^k = \sum_{n=0}^{k} {}_kC_n x^n \text{ より、}$$

$$(-1) - (x-1)^k + x^k + 1$$

に $x = 1$ を代入した値になります。
$\therefore$　k が偶数のとき、必ず 1 になります。

3.4.2　k が奇数

この場合、${}_kC_m =_k C_{(k-m)}$ となるので、簡単に -1 になることが示されます。

これで、n に平方因数が無いときが終わりました。ここまで来ると、形があの関数にそっくりだなと気付くわけです。

3.5　n に平方因数が含まれるとき

n に立方因数が含まれていたり、平方因数が複数含まれていたりする場合を全て場合分けするのは不可能ですが、3.2 や 3.3 を見てみると、2 種類以上の平方因数がある時は、自明に p の冪乗を p にしても $f(n)$ の値は変わらないことが分かります。また、立方因数もしくは素数の 4 乗、5 乗があったとしても同じことが言えます。したがって、次のような n について $f(n)$ の値を調べれば良いことになります。

$$n = p^2X \text{ (但し、} X \text{ は異なる } k \text{ 個の素数の積で、} p \text{ と } X \text{ は互いに素である)}$$

そして、p^2X と pX の違いはなんでしょう。それは「p^2X の場合は pX の倍数を考えなければならない」ということです。すると、

$$k \text{ が奇数の時、} f(p^2X) = f(pX) - 1\text{、} k \text{ が偶数の時、} f(p^2X) = f(pX) - 1$$

つまり、この場合全て $f(p^2X) = 0$ になります。

以上の議論により、

$$f(n) = \mu(n) \text{(但し、} \mu(n) \text{ は } Mobius \text{ 関数)}$$

4　あとがき

前から考えていた問題が解けなかったため、去年の夏休みにちょっと考えた問題について書くことになってしまいました。$Mobius$ 関数についてもっと知りたい方は以下の本を参照してください。（もっと良い本もあるのでしょうが、自分は持っていないので）

・$G.H.Hardy$　$E.M.Wright$『数論入門Ⅰ』

日本語が苦手でよく分からなかい文章だったかも知れませんが、最後までお読み頂きありがとうございました。