天秤とニセコイン

高校 1 年 1 組 19 番　北村拓真

1　はじめに

本日は灘校数学研究部の部屋にお越しいただきありがとうございます。

この記事では、次のような、天秤とニセコインをの問題について考えます。

問題 1.1 (基本形)**.** n 枚のコインがあり、そのうち 1 枚がほかより軽いとする。このコインをニセコインとし、他のコインを本物のコインとする。（もちろん本物はすべて重さが同じ）この n 枚のうちニセコインを、天秤を用いて判別したい。天秤は、「左の皿」と「右の皿」にコインをのせ（何枚のせてもよい）それらが傾く、またはつりあうことによってどちらが重いか軽いか、また同じ重さかがわかるものとする。また、天秤を用いることでしかコインが本物かニセかを判定できないものとする。このとき、何回天秤を使用すればニセコインを判定できるのか、その最小回数 $f(n)$ を求めよ。

「何だ、この問題か」と思った方も多いと思います。実際この問題、というかパズルは誰もが一度は目にした事のある有名なものかと思います。また、結果を知っている人もたくさんいるでしょう。けれども、それを実際に示すのは、結構手間がかかります。今回は、この問題と、これを変形したものについて f がどうなるのかを見ていとにします。

その前にひとつ。現れる文字（n とか k とか）は、特に指定のない限り、自然数を表すものとします。

2　基本形

早速基本形について考えていきましょう。

まず、天秤 1 回の測定で、「左の皿にのせたコインの中にニセが存在」「右の皿に乗せたコインの中にニセが存在」「のせなかったコインの中にニセが存在」の、どれかが言えます。よって、次が成り立ちます。

定理 2.1. $n \geq 2n'$ のとき $f(n) \leq \max[f(n'), f(n-2n')]+1$。ただし、$f(0)=0$ とする。

証明. 1 回目の測定で、左右の皿に n' 枚のせることを考えると、上の考察より自明。 $\square$

次に小さい数で実験してみると、$f(1)$ は、そもそも本物のコインがないため 0 であり、$f(2)$ は、2 つを比較して、すぐどちらかニセとわかるので 1 です。$f(3)$ についても、3 枚のコインのうち、2 枚を左右にのせ、傾いたら上に傾いたほうがニセ、つりあったら残った 1 枚がニセとなり、よってこれも 1 です。しかし、$f(4)$ は、どうやっても 1 回で測定できないため、2 です。そこで、このコイン 3 枚の時の原理を繰り返し用いて、まず次のことが言えます。

定理 2.2. $f(3^m) \leq m$（m は非負整数）

証明. m に関する帰納法で示す。

$m=0$ のとき、$f(1)=0 \leq 0$ なので、成立

$m=k$ のときの成立を仮定し、$m=k+1$ のときを示す。

定理 2.1 において、$n = 3^{k+1}, n' = 3^k$ とすると、帰納法の仮定より、$f(3^{k+1}) \leq f(3^k)+1 = k+1$ となり、成立。 $\square$

また、次が言えます。

定理 2.3 (広義単調増加性)**.** 任意の a, b に対し、$a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

証明. $f(a) \leq f(a+1)$ を示せばよい。これを帰納法で示す。

$a=1,2,3$ のときはさっきの考察より成立。

$a \leq k$ のときの成立を仮定して、$a=k+1$ の場合について考える。$k+1$ 枚のときの、$f(k+1)$ 回の手順をひとつ取り、その手順において、1 回目に左右の皿に k' 枚のコインを乗せたとする。このとき、定理 2.1 より、$f(k+1) \leq \max[f(k'), f(k+1-2k')]+1$。また、これが最小手順であるため、この $\leq$ は $=$ である。

- $k+1 \neq 2k'$ のとき

  定理 2.1 より、$f(k) \leq \max[f(k'), f(k-2k')]+1$。また、帰納法の仮定より、この右辺 $\leq \max[f(k'), f(k+1-2k')]+1 = f(k+1)$ よって成立。

- $k+1 = 2k'$ のとき

  定理 2.1 より、$f(k) \leq \max[f(k'-1), f(2)]+1$。また、帰納法の仮定より、この右辺 $\leq \max[f(k'), 1]+1 = f(k+1)$（$f(k) \geq 2$ に注意）よって成立。

□

さて、$f(3)=1$ であって、$f(4)=2$ であることから、一般に $f(3^m+1)\geq m$ でないかと予想できます。これを示すため新たな考え方を用意します。

定理 2.1 でふれたとおり、天秤 1 回の測定で、ニセコインが左の皿にあるのか、右の皿にあるのか、はたまたつりあっているのかが分かります。コイン 4 枚の場合、1 回目の測定で、各皿にのせた、またはのせなかったコインの 3 種類のうち、どれかが 2 枚以上になるので、その中にニセがあると分かった場合を考えると、1 回では判別できないことが分かります。

天秤の使用回数が増えても同様のことが言え、例えば、「1 回目左、2 回目のせない、3 回目右」というコインが 2 枚以上あったら、その測定法では、3 回で判別できないことがわかります。一般に言うと、次のようになります。

定理 2.4 (基本原理)**.** 「n 枚の中で、ニセコインがどれか、その解の個数」を $g(n)$、「天秤 k 回使用で区別できるニセコインの解、の最大枚数」を $h(k)$ としたとき、$g(n)>h(k)\Longrightarrow f(n)>k, f(n)\geq k+1$

（ここで g や h の定義を曖昧にしたのは、後の問題でも使うため。例えばこの基本形では自明に $g(n)=n$ となる）

証明. 鳩ノ巣原理より、コインを k 回で種類分けしたとき、コインが 2 枚以上ある種類が存在するため。 □

この定理を使うと、先程言っていた $f(3^m+1)\geq m+1$ が示せます。

定理 2.5. $f(3^m+1)\geq m+1$

証明. 定理 2.4 において、基本形では $g(n)=n, h(k)=3^k$（「右、のせない、右 ⋯ 」という、何回目にどこにいたかを列挙したものは高々3^k 個しかないため）なので、$g(3^m+1)>h(m)$ となり、示された。 □

以上の定理より、f を求めることができる。

定理 2.6. $f(n)=\lceil\log_3 n\rceil$（ただし x を実数としたとき、$\lceil x\rceil$ は、x 以上の最小の整数を表すものとする）

証明. $f(n)=m$ なる n が、$3^{m-1}+1\leq n\leq 3^m$ なる任意の n であることを示せばよく、これは, まず $m=0$ についてはよく、$m\geq 1$ については定理 2.2 と定理 2.3, 定理 2.5 より $\cdots\cdots\leq f(3^{m-1})<m\leq f(3^{m-1}+1)\leq f(3^{m-1}+2)\leq\cdots\cdots\leq f(3^m)\leq m<f(3^m+1)\leq\cdots\cdots$ となり、示される。 □

3　重い軽いが不明な場合

では、次の場合はどうでしょう。

問題 3.1. 問題 1.1 において、ニセコインが他より重いのか軽いのかが分からないなら、$f(n)$ はどうなるか。ただし、$n \geq 3$ とする。

まず、f の広義単調増加性がいえます。（証明はできますが、長くなりそうなので省略します。ちなみに、これ以降の問題においても、f の広義単調増加性がいえますが、これも略。）

また、基本原理において、$g(n) = n, h(k) = \dfrac{3^k+1}{2}$（「右、のせない、右…」という、何回目にどこにいたかを列挙したものについて、右と左がまったく同じ（例えば「右、のせない、右」と「左、のせない、左」）ものは区別できない（天秤が傾いたとき、どちらにニセコインがあるかは区別できないため）ので、まったくのせないという種類をのぞいて半分に減る）となるので、$f(\dfrac{3^m+1}{2}) \leq m$ ……と思いきや、実はこれは成り立ちません。

定理 3.2. $f(\dfrac{3^m+1}{2}) \geq m+1$（ただし、$m \geq 2$）

証明. 帰納法で示す。

$m = 2$ のときは、コイン 5 枚のときを調べると $f(5) = 3$ がいえるので（詳しくは示しません。各自調べてみてください。）、成立

$m = k$ のときの成立を仮定し,$m = k+1$ のときを示す。1 回目に皿にのせる枚数で場合分けする。

- $\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚以下の場合

  つりあったとすると、のせなかった $\dfrac{3^k+3}{2}$ 枚以上を判別しないといけないが、これは帰納法の仮定より k 回以上必要なので、成立

- $\dfrac{3^m+1}{2}$ 枚以上の場合

  傾いたとすると、のせなかったコインはすべて本物だが、のせたものすべてにニセの可能性がある。あわせて 3^k+1 枚以上。これを判別するには、基本原理において $h(k)$ が高々3^k であることより、k 回以上必要。よって成立。

よって示された。 □

では 1 枚減らして $f(\dfrac{3^m-1}{2})$ 枚のときはどうでしょうか。これは、m 以下のようです。

このことを示す前に、次の補題を示します。

補題 3.3. 問題 3.1 に、「各コインに、『もしそれがニセなら、本物より重いか軽いか』が定まっている」という条件を付け加えたとする。この問題において、$n = 3^m$ で、かつ「重い」「軽い」と定められたコインがそれぞれ $\dfrac{3^m+1}{2}, \dfrac{3^m-1}{2}$ 枚と分かっているとき、m 回使用すれば、ニセコインを判別できる。
（実はこの問題について、$f(n) = \lceil \log_3 n \rceil$ である。興味のある方は考えてみてください）

証明. これが示されれば、「重い」「軽い」と定められたコインがそれぞれ $f(\dfrac{3^m-1}{2}), f(\dfrac{3^m+1}{2})$ 枚のときも示される（対称性より）ことに注意しておく。

m に関する帰納法で示す。

$m = 1$ のとき、$f(3) = 1$（重い 2 枚を 1 枚ずつのせればよい）≤ 1 なので、成立

$m = k$ のときの成立を仮定し、$m = k+1$ のときを示す。このとき、1 回目左の皿に「重い」コインを $\dfrac{3^m+1}{2}$ 枚、「軽い」コインを $\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚、右の皿に「重い」コインを $\dfrac{3^m+1}{2}$ 枚、「軽い」コインを $\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚、のせれば、のせなかったコインの中に「重い」コインが $\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚、「軽い」コインが $\dfrac{3^m+1}{2}$ 枚あることになるので、定理 2.1 における考察と、帰納法の仮定より、のこりは k 回ですむ。よって示された。 □

では、本題を示しましょう。

定理 3.4. $f(\dfrac{3^m-1}{2}) \leq m$

証明. m 回でできることを示せばよく、これを帰納法で示す。

$m = 2$ のとき、$f(4) = 2$ がいえるので（これも詳しくは示しません。）、成立。

$m = k$ のときの成立を仮定し、$m = k+1$ のときを示す。まず、1 回目は、左右の皿に $\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚ずつのせ、$\dfrac{3^m+1}{2}$ 枚のこす。

- 傾いた場合、のせなかった $\dfrac{3^m+1}{2}$ 枚は本物。のこり $3^k - 1$ 枚については、「もしニセなら本物より重い」コインと「もしニセなら本物より軽い」コインが半分ずつなので、ここに本物と判定されたコインを 1 枚いれこのコインを「もしニセなら本物より重い」とみなせば（「もし」なので許される）補題 3.3 より、のこり k 回で判別可能。

- つりあった場合、皿にのせた 3^k-1 枚は本物。ニセは、のこりの $\frac{3^k+1}{2}$ 枚の中にある。このときさらに帰納法を用いて、のこり k 回で判別可能なこと示す。$k=1$ のとき、のこり 2 枚のうち、片方を本物のコインと調べればよい。

  $k=l$ のときの成立を仮定し、$k=l+1$ のときを示す。（この帰納法の中で）1 回目、左にこの $\frac{3^{l+1}+1}{2}$ 枚の候補の中から 3^l 枚のせ、右に本物のコイン 3^l 枚をのせる。

  – 傾いたら、左の皿のコインの中にニセがある。また、本物のコインより重いか軽いかが分かっているので、定理 2.6 より、のこり l 回ですむ。
  – ついあったら、のこりの $\frac{3^l+1}{2}$ 枚のなかにニセがある。帰納法の仮定より、のこり l 回ですむ。

  よって、のこり k 回で判別可能。

以上より、示された。 □

ここまでくると、f を求めることができます。

定理 3.5. $f(n)=\lceil\log_3 2n+1\rceil$

証明. 定理 3.2, 3.4 と広義単調増加性を用いて、定理 2.6 と同様に示すことができる。 □

4 重い軽いも決定する場合

問題 3.1 に、さらに条件をつけくわえます。

問題 4.1. 問題 3.1 において、ニセコインが本物より重いか軽いかも判定しないといけないとする。このとき、$f(n)$ はどうなるか。

この場合はどうなるでしょうか。

定理 3.4 において、この手順ではニセコインの重い軽いを決定できていません。よって、$f(\frac{3^m-1}{2})\geq m+1$ でないかと予想できます。

定理 4.2. $f(\frac{3^m-1}{2})\geq m+1$（ただし、$m\geq 2$）

証明. 帰納法で示す。

$m=2$ のときは、コイン 4 枚のときを調べると $f(4)=3$ がいえるので、成立

$m=k$ のときの成立を仮定し,$m=k+1$ のときを示す。1 回目に皿にのせる枚数で場合分けする。

- $\dfrac{3^k-1}{2}$ 枚以下の場合

  つりあったとすると、のせなかった $\dfrac{3^k+1}{2}$ 枚以上を判別しないといけないが、これは帰納法の仮定より $k+1$ 回以上必要なので、成立

- $\dfrac{3^k+1}{2}$ 枚以上場合

  傾いたとすると、のせなかったコインはすべて本物だが、のせたものすべてにニセの可能性がある。あわせて 3^k+1 枚以上。ここで、基本原理を応用すると、「n 枚の中で、ニセコインがどれか、さらにそれは本物より重いか軽いか、その解の個数」を $G(n)$、「天秤 k 回使用で区別できる、その解の最大個数」を $H(k)$ としたとき、 $G(n)>H(k) \Longrightarrow f(n)>k, f(n)\geq k+1$ となり、$G(n)=n, H(k)=3^k$ なので、のこりの判別に $k+1$ 回必要なので、成立。

よって示された。 □

また、次が言えます。

定理 4.3. $f(\dfrac{3^m-3}{2})\leq m$

証明. m 回でできることを示せばよい。

1 回目、左右の皿に $\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚ずつのせ、$\dfrac{3^m-1}{2}$ 枚のこす。

- 傾いた場合、補題 3.3 より、のこり m 回で判別可能。

- つりあった場合、のせなかった $\dfrac{3^{m+1}+1}{2}$ のなかにニセがある。帰納法を用いて、のこり m 回で判別可能なこと示す。

  $m=1$ のとき、のこり 1 枚を本物のコインと調べればよい。

  $m=k$ のときの成立を仮定し、$m=k+1$ のときを示す。(この帰納法の中で)1 回目、左にこの $\dfrac{3^{k+1}+1}{2}$ 枚の候補の中から 3^k 枚のせ、右に本物のコイン 3^k 枚をのせる。

  - 傾いたら、左の皿のコインの中にニセがある。また、本物のコインより重いか軽いかが分かっているので、定理 2.6 より、のこり k 回ですむ。

– つりあったら、のこりの $\dfrac{3^k-1}{2}$ 枚のなかにニセがある。帰納法の仮定より、のこり k 回ですむ。

よって、のこり k 回で判別可能。

以上より、示された。 □

これらの定理より、f を求めることができます。

定理 4.4. $f(n) = \lceil \log_3 2n+1 \rceil$

証明. 定理 4.2, 4.3 と広義単調増加性を用いて、定理 2.6 と同様に示すことができる。 □

5 ニセコインの存在すら不明な場合

問題 3.1 に、次のように条件をつけくわえるとどうなるでしょうか。

問題 5.1. 問題 3.1 において、ニセコインがそもそも存在しないかもしれないとする。(つまり、ニセコインは 1 枚か 0 枚)このとき、$f(n)$ はどうなるか。

この場合、基本原理において、$g(n) = n+1$ となりますが、$h(k)$ は変化しないため、結局定理 3.5 と変わらないのではないかと予想できます。

定理 5.2. $f(\dfrac{3^m+1}{2}) \geq m+1$(ただし、$m \geq 2$)

証明. 上の考察より、定理 3.2 と同様に示せる。 □

定理 5.3. $f(\dfrac{3^m-1}{2}) \leq m$

証明. 左右どちらかに傾いた時点で、ニセコインの存在が確定するので、定理 3.4 の証明が丸々使える。あと、後のほうの帰納法において、$k=1$ についていえば、よく、これも自明なので、OK。

□

定理 5.4. $f(n) = \lceil \log_3 2n+1 \rceil$

証明. 定理 5.2, 5.3 と広義単調増加性を用いて、定理 2.6 と同様に示すことができる。 □

また、問題 4.1 についてもこの条件をつけくわえることができますが、このときも、4 章と同様の方法で、同じ結果が得られます。

6　ニセが p 枚の場合

最後に、ニセコインを増やした場合を考えます。

問題 6.1. 問題 2.1 において、ニセコインが一般に p 枚なら、$f(n)$ はどうなるか。

この場合、上限を与えることはできませんでしたが、基本原理の応用より、下限は与えることができました。

定理 6.2. $f(n) \geq \lceil \log_3 {}_n\mathrm{C}_p \rceil$

証明. 定理 4.2 において用いた「基本原理の応用」において、$G(n) = {}_n\mathrm{C}_p, H(k) = 3^k$ なので。 □

7　あとがき

いかがでしたか。僕としては、最後の問題が未解決のまま終わってしまい、なんとももどかしい（汗）

それでも途中の問題についてはかなり厳密に示したつもりなので、まあ良しとしましょう（と自分に言い聞かせる）

組み合わせ論についての記事は少ないので、もう少し高度な内容も ⋯ とも思ったのですが、考えていた問題がことごとく解けなかったので、こんな部誌になってしまいました。でもなかなか組み合わせ論はおもしろくありませんか？特に、いろいろ実験して一般的にどうなるのか予想するところとか、その予想があっていたときの爽快感とか ⋯ この記事を読んで、これらを味わうのは難しいですが、是非 1 度、手を動かして、もう一度この問題たちについて考えてもらえると爽快感が得られるかもしれません。そうなってくれると、作者としては幸せです。

生意気なことを言ってしまった（汗)。とりあえず、作者は組み合わせ論が好きだ、ということです。

長くなったのでこの辺で終わりにします。最後までお読みいただきありがとうございました。(ちなみに去年はニムについて書いたので、2 進数のオンパレードでした。ことしは 3 のべき乗だらけ。ということは来年は 4 の ⋯)