無理数の無理数乗は有理数となるか？

高校 2 年 2 組 21 番
黒住　篤優

0　はじめに

本日は数学研究部にお越しいただきありがとうございます。

この部誌では題を見ればわかる通り、無理数の無理数乗が有理数となりえるかということについて考えてみました。以下の結果は各自で容易で導けるほどのもので、他の難しい論文で読むのが疲れた人はここで和らいでいってください（笑）

1　具体的な方向性

まず。例を上げてみる。$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ か $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ が条件を満たすものである。なぜなら、もし $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数ならば $\sqrt{2}$ は無理数なので条件を満たす。次に、有理数でないとしたら、無理数となる。また、$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ なので、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数ならば、$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ が条件を満たす。

同じような考え方より無限個この条件を満たすものが存在することを示す。

任意の自然数 m に対して、

$$\sqrt[m]{m}, (\sqrt[m]{m})^{\sqrt[m]{m}}, \left((\sqrt[m]{m})^{\sqrt[m]{m}}\right)^{\sqrt[m]{m}}, \cdots\cdots \left(\cdots\left(\left(\sqrt[m]{m}\right)\overbrace{^{\sqrt[m]{m}}\right)^{\sqrt[m]{m}}\cdots}^{m\text{ 個}}\right)^{\sqrt[m]{m}}$$

を考えると、この $m+1$ 個の数の中に条件を満たすものが 1 つ存在する。

これはスタートの $\sqrt[m]{m}$ が無理数であり、最後が $(\sqrt[m]{m})^m = m$ となり、有理数になるので、どこかで（無理数）$^{\sqrt[m]{m}}$ =（有理数）となるので、条件を満たすものが 1 つ存在することがわかった。これは任意の自然数 m に対して成り立つので、条件をみたすものは無限個存在することがわかった。

よって、以下は任意の無理数に対し、a 乗すると有理数になるような無理数 a が常に存在するかを考える。

2　証明

ここで任意の無理数を a とし、もう一方の無理数を b、また c を $a^b = c$ となる有理数とする。ここで、$a^b = c$ から、

$$b \log a = \log c$$

とおけ、

$$b = \frac{\log c}{\log a}$$

もし $\frac{\log c}{\log a}$ が無理数となるような有理数 c が存在すれば、その時の b, c が解となるので、有理数 c が存在しないとして矛盾を導く。

すると、全ての有理数 d に対して、

$$\log d = \frac{n}{m} \log a \ \ (n, m \text{ は整数}, m \neq 0)$$

となるので、ここで

$$\log 2 = \frac{n_1}{m_1} \log a, \log 3 = \frac{n_2}{m_2} \log a \ \ (n_1, n_2, m_1, m_2 \text{ は自然数})$$

だったとすると、

$$2 = a^{\frac{n_1}{m_1}}, 3 = a^{\frac{n_2}{m_2}}$$

となり、

$$a = 2^{\frac{m_1}{n_1}} = 3^{\frac{m_2}{n_2}}$$

より、$n_1 n_2$ 乗すると、

$$2^{m_1 n_2} = 3^{m_2 n_1}$$

なので、m_1, m_2, n_1, n_2 は 0 でないので、矛盾。よって $\frac{\log c}{\log a}$ が無理数となるような有理数は存

在する。

$$\left(\begin{array}{l}
\text{ちなみに}\dfrac{\log c}{\log a}\text{が有理数になるための条件を求めると、}\\
\dfrac{\log c}{\log a} = \dfrac{n}{m} \quad (m, n \text{ は自然数})\\
\dfrac{n}{m} \times \log a = \log c\\
a^{\frac{n}{m}} = c \quad \text{よって } a = c^{\frac{m}{n}}\\
\text{なので } a \text{ が有理数の有理数乗ではない時は}\dfrac{\log c}{\log a}\text{が有理数となるような有理数 } c \text{ は}\\
\text{存在しない。} a \text{ が有理数の有理数乗である時は、}\dfrac{\log c}{\log a}\text{が有理数となるような有理数 } c\\
\text{は存在する。}
\end{array}\right)$$

この時の c の 1 つを c_1 とおくと、

$$b = \frac{\log c_1}{\log a}$$

とおけば条件を満たすものが作られる。

3　あとがき

部誌のレベルを下げてしまい、すいません・・・。今年も計画性のなさを露呈する形になってしまいました。やっぱり、未解決問題に時間をかけるのはよくないですね。

結局柔道部の K.K さんにネタを提供してもらう形になりました。

K.K さんありがとう！！

この部誌では $a^b = c$ としたとき、a が任意の無理数ならば、c が有理数となる無理数 b が存在することは示されたが、b が任意の無理数ならば c が有理数となる無理数 a が存在するかということは考えていない。もし、このような無理数 a が全ての無理数 b で存在することを示すならば、次の補題を示せばよい。

補題. $2^A, 3^A, 5^A, \cdots, (\text{素数})^A$ の全てが有理数となる無理数 A は存在しない。

自分で導いてみてください。

また、この補題は自分ではまだ解決できていませんが、出来た方は suuken96@yahoo.co.jp まで連絡していただけると幸いです。

ところで、「1. 具体的な方向性」の中で紹介した $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が有理数か無理数かはまだわかっ

ていないらしいです。これは、$a^{\sqrt{2}} = 2$ となる a が有理数か無理数かと同値です。a は有理数になりそうにないですけどね・・・

無理矢理にでも未解決問題に持って行き、終わりたいと終わります。

最後までお読みいただきありがとうございました。