ケーキを分割する方法について

高校 1 年 2 組 45 番
三谷　庸

1　はじめに

本日は数学研究部にお越しいただきありがとうございます。この項では、“ケーキ[*1]を平等に分割する方法” について説明します。たとえば、よく知られている例ですが、二人の人 A,B がケーキを分けるとき、A がケーキを二つに切って、そのどちらかを B が選ぶ、というわけ方をすれば二人とも平等だと納得することができます。(この分け方は後で何度も出てきます) ここではこれを n 人の場合に拡張します。予備知識は何も要りません。難しい数式などは出てきませんので是非読んでみてください。

2　“平等な” 分割

ここで考えるのは、次のような問題です。

問題 . ケーキを n 人で分けるとき、どの人も (その人の基準で)$1/n$ 以上ずつもらえるようにする方法はあるか

ここでいくつか注意をしておきます。

- ケーキを分けている人をプレイヤー 1, プレイヤー 2,... プレイヤー n とよぶ。
- 単に “ケーキを 3 つに分ける” などと言った場合、“その人の基準で 3 等分する” ことを意味する。
- “移動式ナイフ” は考えない。つまり、ナイフを端から少しずつ動かして切りたいところで “ストップ” と叫ぶ、ということは考えない。

$n = 2$ のときはすでに説明したとおりなので、$n \geq 3$ のときを考えます。次のようにすると

[*1] 別に何でもいいのですが

うまくいきます。

step 1. プレイヤー 1,2 が最初に説明した方法で二人で分ける。

step 2. プレイヤー 1,2 はそれぞれ自分のケーキを 3 つに分け、プレイヤー 3 はそれぞれから一番大きいと思うものをとる。

step 3. 以下同様に、プレイヤー $1, 2, \ldots, k-1$ が自分のケーキを k 個に分け、プレイヤー k がそれぞれの中から最も大きいと思う物を選ぶことを繰り返す。

しかし、これでは必ず合計 $n!$ 回ケーキを切る必要があります。$n!$ は n が少し大きくなっただけでもかなりの大きさになります。もっと切る回数を少なくすることができます。以下のような方法です。ここで、ケーキを “けずる” という操作が重要になります。

step 1. プレイヤー 1 がケーキから $1/n$ だけ切り出す。（これを P_1 とする）

step 2. プレイヤー 2 は、

- P_1 が全体の $1/n$ 以下だと思うなら、何もしない。
- P_1 が全体の $1/n$ よりも大きいと思うなら、P_1 を $1/n$ になるようにけずる。

ここで得られたものを P_2 とする。

step 3. 以下同様に、プレイヤー $3, 4, \ldots, n$ も同じことをする。このとき、P_n はすべての人が $1/n$ 以下の大きさだと思っている。

（なぜなら、$P_1 \supset P_2 \supset \ldots P_n$ だから）

step 4. $P_i = P_n$ を満たす最小の i に対して、プレイヤー i が P_n をとる。

step 5. $n-1$ 人で同様のことをする。最終的には人数は 2 人になるので、最初に説明した方法で分けられる。

これで全員を $1/n$ 以上受け取っているとさせることができました。（切る回数は最悪でも n^2 回です。）

しかし、これでは “自分よりもあの人のほうが多くもらっている” という不満が出るのを防ぐことはできません。このような不満が出ない方法を考えてみましょう。

3 “不満の出ない” 分け方

ここでは、どのプレイヤーからも “不満の出ない” 分け方を考えます。

つまり、ここで考えるのは次のような問題です。（2 章での注意はここでも同じです。）

問題 . ケーキを n 人で分けるとき、どのプレイヤーも自分が一番多く (同じでも良い) 受け取っていると思えるようなわけ方はあるか。

まず $n = 3$ のときでの方法を説明してから、一般の n での方法を説明します。

3.1 $n = 3$ のとき

先ほどと同様に、ある人が 3 つに分け、それを別の人がけずるという方法をとります。実際の手順を見てみましょう。

step 1. プレイヤー 1 がケーキを 3 つに分ける。

step 2. プレイヤー 2 は

- “最も大きくて、同じ大きさだ” と思うものが 2 つ以上あれば、何もしない。(パスする)
- そうでないなら、最も大きい欠片を 2 番目に大きい欠片と同じ大きさになるようにけずる。

ここでけずられた物があれば、それ (“けずりかす”) は L として横においておく (後で分ける)。

step 3. プレイヤー 3,2,1 の順にケーキを選ぶ。ここで、プレイヤー 2 が 2 でパスせず、しかもけずられた欠片をプレイヤー 3 がとらなかった場合、プレイヤー 2 はそれをとらなければならない。

- これで L を除く部分は不満の出ないわけ方になっていることがすぐにわかる。

step 4. プレイヤー 2 が 2 でパスしていれば、これで終わりである。そうでない場合、プレイヤー 2,3 のうちで 3 でけずられていない欠片をとったほうが、L を 3 つに分ける。この人を cutter、(プレイヤー 2,3 のうちの) もう一人を non-cutter と呼ぶ。

注意 . ここで、L の分け方によらず、プレイヤー 1 が non-cutter に対して不満を持つことはない。

step 5. 4 で分けられた欠片を、non-cutter, プレイヤー 1,cutter の順にとる。このわけ方で不満が出ることはないことが確かめられる。

この方法をそのまま n 人の場合に対して使おうとしてもうまくいきません。

しかし、同じように “後はどのように分けても良い” という状況を作り出すことで n 人の場合にもうまくいく方法があります。これを次の節で説明します。複雑になるので、まず $n = 4$

の場合で説明し、その後で一般の n のときはこれをどう修正すればよいか説明することにします。

3.2 $n = 4$ の場合

まず、$n = 4$ の場合は次のようにします。長くなりますが順番に読んでいってください。

step 1. プレイヤー 2 がケーキを 4 つに分け、それを各プレイヤーに（適当に）配る。

step 2. 各プレイヤーはこのわけ方に同意するかどうか決める。

step 3. 全員が同意した場合、これで終わり。

step 4. 3 で同意しないプレイヤーがいた場合、その中で数字が最小のものを選ぶ。これをプレイヤー 1 としてよい。

プレイヤー 1 が自分の欠片より大きいと思った欠片を A とし、プレイヤー 1 に最初に配られた欠片を B とする。

- ここで、プレイヤー 1 は $A > B$、プレイヤー 2 は $A = B$ だと思っている。

step 5. プレイヤー 1 は、A を $(r-7)/r$ 倍しても B より大きいと思えるような自然数 $r \geq 10$ をとる。これは次のように言いかえられる:

A をどのように r 個に分けても、プレイヤー 1 がそのうち小さいほうから 7 つを取り除いたものは、B よりもプレイヤー 1 にとって大きい。

step 6. プレイヤー 2 は A, B をそれぞれ r 個に分ける。

step 7. プレイヤー 1 はまず B の分割の中から最も小さい 3 つを選ぶ。これを Z_1, Z_2, Z_3 とする。さらに、

- A の分割のうち大きいほうから 3 つがどれも Z_1, Z_2, Z_3 のすべてよりも大きいと思った場合、それらを選ぶ。さらに、それらがすべて同じ大きさになるようにそのうちのいくつかをけずる。（削る個数は 2 個以下）
- そうでない場合、A の分割のうちで最も大きいものをとり、それを 3 つに分ける。

いずれの場合も、これで得られた欠片を Y_1, Y_2, Y_3 とする。

- ここで、プレイヤー 1 はすべての $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対して $Y_i > Z_j$ だと思えることが保証されるが、この証明は後に回す。また、プレイヤー 1 はすべての Y の大きさは等しいと思っている。さらに、プレイヤー 2 はすべての Z の大きさは等しく、それらはどれも Y の大きさ以上であると思っている。

step 8. プレイヤー 3 はこれら 6 個の欠片の中から一番大きいものを二番目に大きい物と同じ大きさになるように (必要があれば) けずる。

step 9. プレイヤー 4,3,2,1 の順にこの 6 個の中からひとつずつ欠片を取る。ここで、

- プレイヤー 3 は自分がけずった欠片が残っていればそれをとる。
- プレイヤー 2 は Z_1, Z_2, Z_3 のいずれかをとる。
- プレイヤー 1 は Y_1, Y_2, Y_3 のいずれかをとる。

注意． ここまでで $\{X_1, X_2, X_3, X_4, L_1\}$ という部分的な不満の出ない分配が得られた（X_i は i の取り分である）。ここで、プレイヤー 1 は、X_1 は X_2 よりも大きい（同じではない）と思っている。この差を ϵ としよう。また、$\mu_1(P)$ でプレイヤー 1 の考える欠片 P の大きさをあらわすことにする。

step 10. プレイヤー 1 は $(4/5)^s \mu_1(L_1) < \epsilon$ となるような正の整数 s を選ぶ（s を十分大きくとればこれは成り立つ）。

step 11. プレイヤー 1 は L_1 を 5 つに分ける。

step 12. プレイヤー 2 はこれらから最も大きい 3 つを選びそれらをその 3 つがすべて同じ大きさになるようにけずる（けずる個数は 2 つ以下）

step 13. プレイヤー 3 はこれら 5 つ（けずられているかもしれない）のうち最も大きいものを、2 番目に大きいものと同じ大きさになるようにけずる。

step 14. プレイヤー 4,3,2,1 の順に欠片をとる。ここで、プレイヤー 3,2 は、自分がけずった欠片がまだ残っていればそれをとらなければならない。

step 15. 11 からをあと $s-1$ 回繰り返す (合計 s 回やることになる)。

注意． ここまででの分割を改めて $\{X_1, X_2, X_3, X_4, L_2\}$ とする。X_1, X_2, X_3, X_4 は不満の出ないわけ方である。また、プレイヤー 1 は X_1 は $X_2 \cup L_2$ よりも大きいと思っている。

ここで $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ の部分集合 “$\mathcal{IA}$” を作っていく。ただし、$(i, j) \in \mathcal{IA}$ は残っているケーキをどのように分けてもプレイヤー i はプレイヤー j に対して不満を持たないことを意味する。ここまでの議論から、今、$(1,2) \in \mathcal{IA}$ とする。

step 16. プレイヤー 2 は L_2 を 12 個に分ける。

step 17. 各プレイヤーは、その 12 個の欠片がすべて同じ大きさだと思うならば “D” と、そうで

ないならば “A” と宣言する。

step 18. $D \times A \subset \mathcal{IA}$ ならば、この 12 個の欠片を適当に分けて終わり。

step 19. そうでないときには、17 での D, A をみて、$D \times A$ に属するが $\mathcal{IA}$ に属さないような (i, j) をとってくる。そして、プレイヤー 1,2 をそれぞれプレイヤー i, j にかえて 4 へ戻る。

step 20. 5 から 18 を繰り返す。それぞれの繰り返しで、終わらない場合は $\mathcal{IA}$ の元が増えていくので、この繰り返しは有限回で終わる。

これで終わりです。“余り” を減らしていって “後はどのように分けられても良い” という状況を作り出すことが重要だったようです。後に残しておいた証明をしましょう。

証明. μ をプレイヤー 1 が考えるケーキの大きさとする。また、A,B の分割を大きいほうから順にそれぞれ $A_1, A_2, \ldots, A_r$ および $B_1, B_2, \ldots, B_r$ とする。示したいことは、

$$\mu(B_{r-2}) < \mu(A_3), \mu(B_{r-2}) < \frac{\mu(A_1)}{3}$$

のいずれかが成り立つことである。どちらも成り立たない、つまり

$$\mu(B_{r-2}) \geq \mu(A_3) \tag{1}$$

かつ

$$\mu(B_{r-2}) \geq \frac{\mu(A_1)}{3} \tag{2}$$

と仮定しよう。1 から、$\mu(B_7 \cup \ldots \cup B_{r-3}) \geq \mu(A_3 \cup \ldots \cup A_{r-7})$ がわかり、2 から $\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_6) \geq \mu(A_1 \cup A_2)$ がわかるので、これらから

$$\mu(B) \geq \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_{r-7})$$

となるが、これは r のとり方に矛盾する。 □

ここから一般の n の場合への拡張はそれほど難しくありません。次の節で一般の場合について説明します。

3.3 一般の n の場合

先ほどとほぼ同じようにやります。まず 11 以降の分け方を考えましょう。各プレイヤー（$1, n$ を除く）は “最も大きくて、同じ大きさ” の欠片を十分な個数つくり、自分が選ぶときにそれが残っているようにすればよいわけです。“十分な個数” とはいくつかというと、

- プレイヤー $n-1$ は、プレイヤー n にとられても残るように 2 つ作るつまり、けずる個数は 1 個まで。
- プレイヤー $n-2$ は、プレイヤー $n-1$ にけずられ、プレイヤー n にとられてもまだ自分の分が残るようにすればよいので、$1+1+1=3$ 個作ればよい。つまり、けずる個数は 2 個まで。
- プレイヤー $n-3$ は、プレイヤー n にとられ、プレイヤー $n-1, n-2$ にけずられても自分の分が残るようにすればよいので、$1+1+2+1=5$ 個作ればよい。つまり、けずる個数は 4 個まで。
- 以下同様に考えていけば、プレイヤー $n-k(k=1,2,\ldots,n-1)$ は $2^{k-1}+1$ 個の "同じ大きさで、最も大きい" 欠片を作ればよいことになる。

ここから、11 では 5 個のかわりに $2^{n-2}+1$ 個に分ければよいことがわかります。さらに、同じように考えれば、7 での 3 という値は $2^{n-3}+1$ であることがわかるはずです。$x=2^{n-3}+1$ とおいておきます。まず、s は

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^s \mu(L_1) < \epsilon$$

となるようにとればよいことがすぐにわかります。

では、5 で出てきた 2 つの数字は一般にはどういう値になるのでしょうか。r がとれたとして上の証明と同じようなことをしてみます。（矛盾を示すために）仮定するのは

$$\mu(B_{r-x+1}) \geq \mu(A_x), \mu(B_{r-x+1}) \geq \frac{\mu(A_1)}{x}$$

です。先ほどと同様にして、これらから

$$\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_{x(x-1)}) \geq \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_{x-1})$$

と、

$$\mu(B_{x^2-x+1} \cup \ldots \cup B_{r-x+1}) \geq \mu(A_x \cup \ldots \cup A_{r-x^2+x})$$

となります。このとき添字の大小関係を見て、$r \geq x^2$ がわかり、また、上の二つの式から、r を

$$\frac{r-(x^2-x)}{r}\mu(A) > \mu(B)$$

となるようにとればうまくいくことがわかります。これで一般の n の場合でも不満の出ないように分けられることがわかりました。

4　おわりに

人がどれだけいてもこのようなわけ方ができるというのは面白いと思いました。ちなみに、この方法でケーキを整数の比で分けることもできます。

たとえば A,B の 2 人が、A が B の 2 倍になるように分けたいと思ったときには、$n = 3$ のときの方法でプレイヤー 1,2 をともに A がやることにすればうまくいきます。

このようにいろいろなわけ方ができますが、日常生活にこの記事の内容を応用するのはやめたほうがいいと思います。

この記事を読んで面白いと感じていただければ幸いです。最後までお読みいただき、ありがとうございました。

参考文献

[1] Steven J. Brams and Alan D. Taylor “An Envy-Free Cake Division Protocol” (http://people.seas.harvard.edu/~arielpro/mfai_papers/BT95.pdf)