選挙について

宮本　大輔
中学 3 年 4 組 39 番

1　はじめに

本日は灘校文化祭、そして数学研究部にお越しいただきありがとうございます。

突然ですが 4 月 10 日統一地方選がありたくさんの人が立候補しました。そしてメディアでは「XX 氏当選確定」等のニュースを報道しました。では、この当選確定はどのような根拠に基づいて行っているのでしょうか？確率を考えながらそれを示したいと思います。（このレポートはあくまでもひとつのモデルを考えたに過ぎずおそらく本当の求め方は異なっています。）あまり大したことはしめしていませんが、ぜひ読んで下さい。

2　確率論

確率論は奥がかなり深いようですが僕はくわしく知らないので簡単な所だけかきます。

定義 2.1 (確率変数)**.** X が確率変数であるとは、X のとりうるそれぞれの値に対して、その値を X がとる確率が定義されていることをいう。また、このとき値 a を X がとる確率を $P(X = a)$ であらわす。

例. X をさいころの目とする。$X = 2$ の時確率 $1/6$,$X = 3$ の時確率 $1/6 \cdots$ となっている。だから $P(X = 2) = 1/6$ である。

例のように X に関してありえる数が $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のみのときは $P(X) = 1/6 > 0$ となりますが、0 から 1 までの任意の数をだすプログラムを考えた時その数がたとえばちょうど 1/3 になるのは小数第 1 位も 3, 小数第 2 位も $3 \cdots$ という奇跡的な確率を突破した時だけなので、その確率は 0 になります。[*1]

[*1] これはその事象が起こらないということではありません。これが連続的な確率変数と離散的な確率変数の違いです。

定義 2.2 (X が連続的な場合)**.** 任意の a で $P(X = a) = 0$ とする。

$$P(X \leq a) = \Phi(a)$$

なる関数を**累積確率分布**という。

すると

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a) + \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= \int_a^b f(X)dx \end{aligned}$$

となる累積確率分布を微分した関数 f があります。これを**確率密度関数**と言い、これから使っていきたいと思います。

3 選挙における確率密度関数

XX 国で国王を決める選挙がおこなわれました。立候補した人は A 氏と B 氏です。この国の選挙の方法は少し特殊でまずコンピューターが 0 から 1 までの数を等確率でだします (x とおく)。この数はだれも知ることができません。そして有権者は投票所にあるボタンを押すと確率 x で A、確率 $1 - x$ で B の名前が画面に表示されその名前を投票しなければなりません。つまり、任意の有権者が A を投票する確率は x です[*2]。x はコンピューターによって等確率にだされる数なので、その確率密度関数は図 1 のようになります。

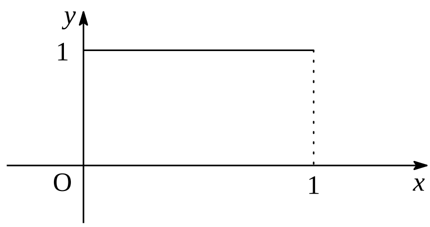

図 1

さて、選挙が終わり、開票が行われています。途中経過は A が a 票、B が b 票です。この時 x の確率密度関数が変わってきます。たとえば、$x = 0$ となった時 A が投票されていればこれは矛盾なので、$x = 0$ はありえないことになります。ここで、x を固定すると A が a 票、B が b 票になる確率は、

$$P(x) = \binom{a+b}{a}(1-x)^b x^a$$

[*2] 等確率というところが変ですが、実際普通の選挙でも x が存在するのでこの特殊な選挙は普通の選挙に似たところがあります。

になります。x ははじめ等確率だったので、これがちょうど確率の比を表わす関数になります[*3]。

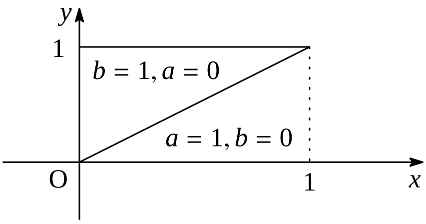

図 2

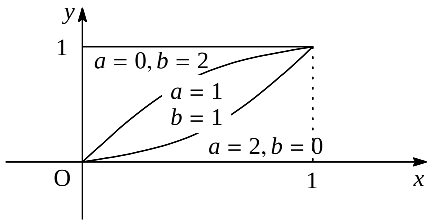

図 3

4　有権者数が十分に多い場合

このときの計算は非常に簡単です。なぜならば x がそのまま A を投票した割合になるからです。例えば、1 億人の人間それぞれが 30 パーセントの確率で灘の文化祭に来るとすると約 3000 万人が文化祭に来ることになるでしょう。一人も来ない確率は 0.3 の 1 億乗にもなります。つまり、B が勝つためには x が 0.5 より小さければいいのです。確率密度関数を積分することによってこの値は

$$Q(X) = \frac{\displaystyle\int_0^{0.5} P(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x}$$

ただし、$P(x)$ は先ほどの確率の比です。b を固定した時の具体的な値を求めてみます。

1. $b = 0$ のとき

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

だから

$$Q(X) = \frac{\frac{1}{(a+1)2^a}}{\frac{1}{a+1}} = \frac{1}{2^a}$$

2. $b = 1$ のとき

$$\int (1-x)x^a \mathrm{d}x = \int x^a - x^{a+1}\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{x^{a+2}}{a+2}$$

[*3] 確率密度関数と言えないのは積分した値が 1 にならないからです。

だから

$$\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

そして

$$\int_0^{0.5} P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)2^{n+2}} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)2^{n+2}}$$

よって

$$Q(x) = \frac{n+3}{2^{n+2}}$$

5　有権者が n 人の場合

A が a 票、B が b 票入っていて、残りの人が A に入れる確率を x とした場合の A が当選する確率を求めます。

残りの $n-a-b$ 人のうち A に k 票入る確率は

$$\binom{n-a-b}{k} x^k (1-x)^{n-a-b-k}$$

$k > \dfrac{n-a}{2}$ であれば、A が勝つことができるから、

$$\sum_{k>\frac{n-a}{2}} \binom{n-a-b}{k} x^k (1-x)^{n-a-b-k}$$

が確率となります。

よって全部あわせたときの A が勝つ可能性は、

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b \left(\sum_{k>\frac{n-a}{2}} \binom{n-a-b}{k} x^k (1-x)^{n-a-b-k} \right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k>\frac{n-a}{2}} \binom{n-a-b}{k} x^{a+k} (1-x)^{n-a-k} \right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x}$$

となります。

6　立候補者が 3 人の場合

　A に投票する確率を x、B に投票する確率を y とすると、$x+y \leq 1$ だから、その確率密度関数は図 4 のようになります。

　x, y を固定したときに、A に a 票、B に b 票、C に c 票入る確率は

$$\binom{a+b+c}{a} \times \binom{b+c}{b} \times x^a y^b (1-x-y)^c$$

だから、確率の比を表す関数 $P_{abc}(x,y) = x^a y^b (1-x-y)^c$

　次に、有権者数が十分に多いとき、A が当選する条件は、$x > y$ かつ $x > 1-x-y$ であることだから、図 5 の範囲になります。

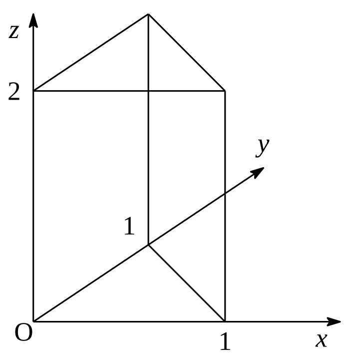

図 4

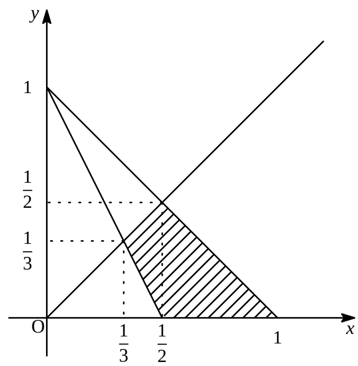

図 5

　よって、A が当選する確率は、

$$D_1 = \{(x,y) \mid x > y, x > \frac{1-y}{2}, x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

として、

$$\frac{\iint_{D_1} x^a y^b (1-x-y)^c \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{D_2} x^a y^b (1-x-y)^c \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

である。

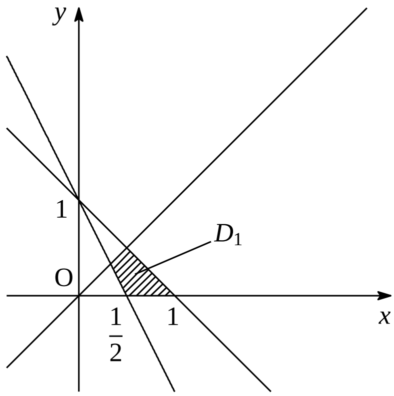

図 6

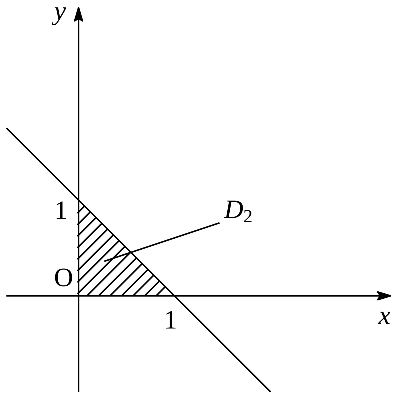

図 7

7　立候補者が n 人の場合

$$
\left(\begin{array}{ll}
\text{立候補者} & A_1, A_2, \ldots, A_n \\
\text{投票する確率} & A_1\text{に } x_1, A_2\text{に } x_2, \ldots, A_{n-1}\text{に } x_{n-1} \\
\text{途中経過} & A_1\text{は } a_1\text{票}, A_2\text{は } a_2\text{票}, \ldots, A_n\text{は } a_n\text{票}
\end{array}\right.
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
D_1 = \{ & x_1 > x_2, x_1 > x_3, \cdots, x_1 > \frac{1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}}{2}, x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0\}
\end{aligned}
$$

$$
D_2 = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0\}
$$

$$
\frac{\iint \cdots\cdots \int_{D_1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots\cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^{a_n} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}}{\iint \cdots\cdots \int_{D_2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots\cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^{a_n} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}}
$$

8　おわりに

このハチャメチャな文章をここまで読んでいただきありがとうございました。あまりたくさん書くことができずに残念です。また、今回は TEX という理系の論文を書くときに使うソフトをこれを書いている前日にインストールしたので分数などがうまく書けなかったのも心残りです。僕の物以外は面白いと思うのでぜひ読んで下さい。あと、有権者のかた、またはこれから有権者になる予定のかたはちゃんと選挙にいきましょう。