二項係数と n 乗数

高校 3 年 1 組 35 番
本田　貴大

1　はじめに

こんにちは。本日は数学研究部にお立ち寄りいただきありがとうございます。*Joseph H. Silverman*『はじめての数論』に練習問題 1.1「平方数と三角数が一致するような数 (ex.1,36 ...) は無限に存在するか？」という問題があります。この問題を解いてから、それを拡張したいなーと思います。

2　準備

この論文に必要な定義・定理を紹介します。定理については証明しないので、証明を知りたい方は、参考文献をお読みください。

$\mathbb{N}$
自然数全体の集合 (自然数解のことを $\mathbb{N}$ 解と書くこととする)

$\mathbb{Z}$
整数全体の集合 (整数解のことを $\mathbb{Z}$ 解と書くこととする)

平方数
自然数の 2 乗であるような自然数

立方数
自然数の 3 乗であるような自然数

三角数
正三角形の形に点を並べたときにそこに並ぶ点の総数に一致する自然数
n 番目の三角数は 1 から n までの自然数の和に等しい

四面体数
正四面体の形に点を並べたときにそこに並ぶ点の総数に一致する自然数
n 番目の四面体数は 1 番目から n 番目までの三角数の和に等しい

定理 2.1（Thue **の定理**）

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n = m \qquad (n \geqq 3)$$

の解は高々有限個である。[*1]

定理 2.2

$$x^3 - dy^3 = 1$$

の $\mathbb{Z}$ 解は $(x, y) = (1, 0)$ という自明な解を除いて高々一つしかない。

定理 2.3　*Pell* 方程式[*2]の解は無限にある。

3　平方三角数

　ここでは、平方三角数について、つまり、先の問題を解きたいと思う。
n 個目の三角数は

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

である。これが平方数であるので、

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \ (m \in \mathbb{N})$$

と書ける。両辺を 2 倍すると、

$$n(n+1) = 2m^2$$

$(n, n+1) = 1$ より、

$$(n, n+1) = (2s^2, t^2) or (s^2, 2t^2) \ (s, t \in \mathbb{N})$$

である。前者の場合、

$$t^2 - 2s^2 = 1$$

後者の場合、

$$2t^2 - s^2 = 1$$

---

*1 この証明は自分は見たことがありません。しかし、$n = 3$ の場合については、後の参考文献で紹介する本で示されています。

*2 *Pell* 方程式とは、平方数でない自然数 d に対して、$x^2 - dy^2 = 1$ という形の方程式のことである。

つまり $X^2-2Y^2=\pm 1$ の $\mathbb{N}$ 解が無限にあればよい。[*3]

$$X^2-2Y^2=(X+Y\sqrt{2})(X+Y\sqrt{2})$$

と因数分解でき、ここに (X,Y) の条件を満たす一つの解 (x,y) があるとすると、

$$\begin{aligned}(x^2-2y^2)^2&=(x+y\sqrt{2})^2(x-y\sqrt{2})^2\\&=\{(x^2+2y^2)+2xy\sqrt{2}\}\ \{(x^2+2y^2)-2xy\sqrt{2}\}\end{aligned}$$

これは、(X,Y) を満たしているので、帰納的に、(X,Y) を満たす $\mathbb{N}$ 解は無限にあることが示された。

4 立方四面体数

§ 2 の拡張で、立方数であり、四面体数である数について考えたいと思う。
まず、四面体数の一般項を求める。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}&=\frac{1}{2}\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=m^3(m\in\mathbb{N})$$

となるような解を考える。ここで、場合分けをする。
(1) n が 3 の倍数で、 n が 2 の奇倍数の時
この時、$(\frac{n}{6},n+1,n+2)=1$ より、

$$n+1=p^3 \qquad\qquad n+2=q^3$$

となる[*4]。同様にして場合分けしていくと、
(2) n が 3 の倍数で、 $n+1$ が偶数の時 $\Longrightarrow$ $n+1=2p^3, n+2=q^3$
(3) n が 3 の倍数で、 $n+2$ が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n+1=p^3, n+2=2q^3$
(4) $n+1$ が 3 の倍数で、 n が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n=2p^3, n+2=q^3$
(5) $n+1$ が 3 の倍数で、 $n+1$ が偶数の時 $\Longrightarrow$ $n=p^3, n+2=q^3$

---

*3 **定理** 2.3 より自明ではあるが、ここでは別の方法で示すことにする。
*4 $\frac{n}{6}=r^3$ とも書けるが、この場合必要ないので無視する

(6) $n+1$ が 3 の倍数で、 $n+2$ が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n = p^3, n+2 = 2q^3$
(7) $n+2$ が 3 の倍数で、 n が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow$ $n = 2p^3, n+1 = q^3$
(8) $n+2$ が 3 の倍数で、 $n+1$ が偶数の時 $\Longrightarrow$ $n = p^3, n+1 = 2q^3$
(9) $n+2$ が 3 の倍数で、 $n+2$ が 2 の奇倍数の時 $\Longrightarrow n = p^3, n+1 = q^3$
つまり、

$$X^3 - Y^3 = 1$$

$$X^3 - Y^3 = 2$$

$$X^3 - 2Y^3 = \pm 1$$

$$X^3 - 2Y^3 = \pm 2$$

の解を調べるのと同値である。

4.1 $X^3 - Y^3 = 1$, $X^3 - Y^3 = 2$ について

$$X^3 - Y^3 = (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$$

$X > Y > 0$ であることより、上記を満たす $\mathbb{N}$ 解が無いことが直ちに分かる。

4.2 $X^3 - 2Y^3 = \pm 1$ について

$$X^3 - 2Y^3 = 1$$

定理 2.2 より、解は $(1, 0)(-1, -1)$ しかない。

$$X^3 - 2Y^3 = -1$$

この解は、$(-1, 0)(1, 1)$ しかない
証明 仮に、他に解 (x_1, y_1) があったとすると、$(-x_1, -y_1)$ は $X^3 - 2Y^3 = 1$ を満たす。
しかし、これは**定理** 2.2 に反する。
∴解は $(-1, 0)(-1, -1)$ しかない □

4.3 $X^3 - 2Y^3 = \pm 2$

$$X^3 - 2Y^3 = \pm 2$$

この解を求めたい。(右辺)=−2 の解が分かれば§ 4.2 と同じアプローチで (右辺)=2 の解も分かる。
$X^3 - 2Y^3 = -2$ の解を求める。(右辺) が偶数より X も偶数である。ここで $X = 2X'$ とすると、

$$8X'^3 - 2Y^3 = -2$$

両辺を $-\dfrac{1}{2}$ 倍すると、

$$Y^3 - 4X'^3 = 1$$

定理 2.2 より、$Y = 1, X = 0$ 以外に高々 1 つの解しか無いことが分かるが、後の参考文献で紹介する「楕円曲線論入門」に掲載されている**定理** 2.2 の証明より、X' が上から抑えられ、あとはパソコンに解かせれば解が他にないことが分かる。
よって、立方数であり、且つ四面体数であるような数は 1 しか存在しない。

5　一般化 (未解決)

予想 5.1

$${}_nC_k = m^k$$

は、以下の条件を満たす時成立しない。

$$m, n, k \in \mathbb{N}, k \geqq 3, m \neq 1$$

定理 2.1 を用いると、有限であることは示せそうですが、残念ながら予想は示せませんでした。$k = 2$ の時、解が無限にあって、$k \geqq 3$ の時解なしというのが、*Fermat* の最終定理っぽくてかっこいいなぁとは思ったのですが…

6　おわりに

これは高 1 の時に書いたもので、4.3 に衝撃的な間違いがあることを指摘され、それがただでさえ提出するのが遅い数研の締切の前日で (高 1 の時に書いたものなら何故締切の前日まで出さないのかと言われるかもしれませんが、それは某部長に脅されたからです。)、考える時間もなく、結局適当になり、しかもパソコンを使うことになってしまいました。4.3 以外は加筆・修正は一切加えていないので (というか読みなおしてもないので)、内容は保証しません。4.3 を簡単にできるなら是非教えてください。間違いの指摘などは是非 `pon_honda1219@yahoo.co.jp` に送ってください。

参考文献

[1] はじめての数論 (Joseph H. Silverman)
[2] 楕円曲線論入門 (Joseph H. Silverman)

[3] 初等数論講義 (Alan Baker)[*5]

[4] LaTeX 2_ε 美文書作成入門 (奥村晴彦)

[*5] この本は絶版で、見たことも読んだことも触れたこともないですが、証明は**定理** 2.2 の証明はこの本に掲載されているらしいです