カプレカー変換

高校 1 年 2 組 19 番
重村 卓人

1　はじめに

本日は数学研究部にお越しいただきありがとうございます。今年は数研部員として役立とうと思い部誌を書きました。しがないものですが、この記事ではカプレカー変換について n 桁での挙動を調べるのが目的です。

2　カプレカー変換とは

カプレカー変換とは、10 進法で表された正整数があったときに、桁ごとの数字を並び替えて作った一番大きな数から一番小さな数を引いた数を返す関数である。以後、“**変換**” と言えばこれを指す。

例. $398 \to 983 - 389 = 594$, $8901 \to 9810 - 0189 = 9621$, $666 \to 0$

また、この変換によって値が変化しない数を “**カプレカー定数**” [*1] と呼ぶ。

例. 495 , 631764

カプレカー定数は 9 の倍数であることは桁和より容易にわかる。

3　ソート

正整数を、前述の一番大きな数にすることを “**ソート**” と呼ぶことにする。カプレカー変換では桁ごとの数の集合に注目するので、元の値とソートした値は変換すると、同じ値になることが容易に分かる。

[*1] カプレカー変換によって、任意の n 桁の正整数が最終的にある数に辿り着く時のみ、それをカプレカー定数と呼ぶこともあるようだが、ここではこの定義とした。また、$32 \to 9$ だが、$032 \to 297$ のように、数字を何桁と見るかで値が変わってくる。

4　3 桁

上記の理由により、ソート済みの数を考える。また、ぞろ目 (333 や 88888 など) は 1 回の変換で 0 になるので考えなくて良い。

よって、この数は $100a + 10b + c\ (9 \geq a \geq b \geq c \geq 0 \wedge a > c)$ とおける。これを abc_{10} と表記する。第一の変換を、繰り下がりに気をつけて筆算をする。

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline & a-c-1 & 9 & 10+c-a \end{array}$$

図 1

変換後の値を pqr_{10} とおくと、$q = 9 \geq p, r$ より $q = a$

1. $pqr_{10} = bac_{10}$　$c = r = c + 1$ となり、矛盾。
2. $pqr_{10} = cab_{10}$　$a = 9, b = 5, c = 4$ となる。

よって、495 は 3 桁で唯一のカプレカー定数である。

しかし、これでは全ての（ぞろ目を除く。以後での議論でも除く。）3 桁の正整数が 495 に到達するかは不明であるため、それを考察する。ソート済みの abc_{10} を変換すると $99(a - c)$ となる。$a - c$ の値によって場合分けしてソートすると次のようになる。

$a - c$	
1	$990 \to 891$
2,9	$981 \to 792$
3,8	$972 \to 693$
4,7	$963 \to 594$
5,6	954(495)

表 1

変換された値をソートすると一段下の値になっていることが分かる。よって、全ての 3 桁の正整数は最終的に 495 に変換され、さらにそれは高々 6 回の変換でなされることが示された。

例. $100 \to 099$[*2] $\to 891 \to 792 \to 693 \to 594 \to 495$

[*2] 3 桁での挙動を考えているので、99 は 099 と見なすことにする。

5　4 桁

3 桁と同様に考え、$1000a + 100b + 10c + d$ $(9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0 \wedge a > d)$ を変換するが、場合分けが必要である。変換後の値は $pqrs_{10}$ とおく。

1. $b = c$　3 桁の場合と同様に考え、$a = b = q = r = 9, d = s = d + 1$ となり矛盾。

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline & a-d-1 & 9 & 9 & 10+d-a \end{array}$$

図 2　$b = c$

2. $b > c$　$p = a - d > a, q = b - c - 1 > b, p > q(\because a - d > b - c)$, $r \geq s$ より、$pqrs_{10} = abcd_{10}, abdc_{10} \cdots dcba_{10}$ の 24 通りから解の候補を絞りこむと、$bcad_{10} = pqrs_{10}, bdac_{10} = pqrs_{10}, cdab_{10} = pqrs_{10}$ の 3 通りとなる。
   これを解くと、$bdac_{10} = pqrs_{10} = 6174$ だけが解として適することが分かる。よって、4 桁のカプレカー定数は 6174 のみである。

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline & a-d & b-c-1 & c-b+9 & 10+d-a \end{array}$$

図 3　$b > c$

3 桁と同様に、ループがあるかどうか考える。$abcd_{10} \to 999(a-d)+90(b-c)$ で、$a-d > b-c$ を使って場合分けが出来るが、ここでは割愛する。結論だけ言うと、全ての 4 桁の数は 7 回以内に 6174 になる。

例. $9610 \to 9441 \to \cdots \to 6174$(7 回)

6　n 桁

$(a_1a_2a_3 \cdots a_n)_{10}$ を変換する。$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \wedge a_1 > a_n$ である。ここで、$a_k - a_{n+1-k} = b_k$ とおく。$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \wedge b_1 > b_n$ と $b_k = -b_{n+1-k}$ が言える。また、引き算の結果を $(p_1p_2p_3 \cdots p_n)_{10}$ とおく。中央項を考えるため、n の偶奇で場合分けをする。

1. n が奇数　$b_k = 0$ となる最小の k を m とおく。$(2 \leq m \leq \dfrac{n+1}{2})$
   $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n, b_k = -b_{n+1-k}$ より、$m \leq k \leq n+1-m$ で $b_k = 0$ となる。
   よって、$k < m$ では、$b_k > 0$ より、繰り下がりは起きない。逆に $m \leq k$ では繰り下がりが起こる。よって、p_k は下のような値を取る。

$$p_k = \begin{cases} 10 + b_k & (k = n) \\ 9 + b_k & (n > k > n+1-m) \\ 9 & (n+1-m \geq k \geq m) \\ b_k - 1 & (k = m-1) \\ b_k & (m-1 > k) \end{cases}$$

   桁和を S とおくと、

$$S = \sum_{k=1}^{n} b_k + 10 + 9(n-m) - 1 = 9(n-m+1)$$

2. n が偶数　奇数の場合と同様に $b_k = 0$ となる最小の k を m とおくが、今回は m の存在が保証されないので、m が存在しない場合について論ずる。（m が存在する場合は奇数と同じ）

$$p_k = \begin{cases} 10 + b_k & (k = n) \\ 9 + b_k & (n > k > \dfrac{n}{2}) \\ b_k - 1 & (k = \dfrac{n}{2}) \\ b_k & (\dfrac{n}{2} > k) \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} b_k + 10 + 9\left(\frac{n}{2} - 1\right) - 1 = \frac{9}{2}n$$

   S が m の値によるのは、繰り下がりの回数が関係するからである。因みに S が 9 の倍数であることもこれで示されている。

7　あとがき

特に何が証明できるわけでもなく終わってしまいました。どうしましょう。先ほどの S の値は、実は繰上りした回数に 9 を掛けただけという当たり前の結果なんですが・・・。来年も書けたら書きたいです。こんな脳みそで書けるのか・・・?

なお、この部誌は同級生の藤村に TEX の代筆をしてもらいました。ありがとうございます。