# 結び目理論

高校 2 年 1 組 14 番
北村　拓真

## 0　前書き

本日は灘校文化祭にお越しいただきありがとうございます。この記事では結び目理論について扱いたいと思います。

## 1　結び目の基本

### 1.1　結び目とは

結び目理論は、トポロジーの 1 分野で、扱うのは閉じた曲線です。すなわち結び目とは、3 次元空間上の枝分かれのない閉曲線で、またこの曲線は空間上を自由に動けるものであり、自分自身と交わらない範囲での変形で移りあう結び目は同じものとします。

要するに、1 本のヒモをぐじゃぐじゃっとして両端をつなげたものが結び目で、その絡まり具合にのみ注目する、ということです。

最も簡単な結び目は、両端を素直につなげたもので（図 1.1）これを**自明な結び目**と言います。

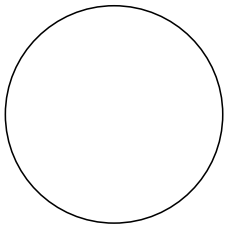


図 1.1

また、自明でない結び目の例としては、ひもを 1 回結んで（結びをきってしまってはいけないが）両端をつなげたもので、これを**三葉結び目**と言います。

さて、結び目は 3 次元のものですが、そのまま扱うのは難しいので、2 次元平面に射影し、その各交点についてひもの上下を明示した形で扱うことにします。これを**射影図**と言います。図 1.2 はさきほど言っていた三葉結び目の 1 つの射影図です。[*1]）また、図 1.3 の結び目はぐじゃぐじゃしていますが、実は自明な結び目であることが言えます。[*2]

---

[*1] 3 つの葉っぱがあるような様から名付けられています。多分

[*2] 頭の中で動かすと確かにそうなっていそうだし、実際にひもを使えばすぐ分かると思います。

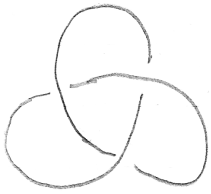


図 1.2

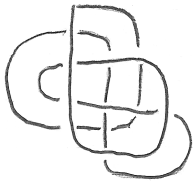


図 1.3

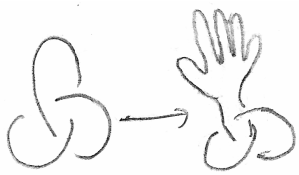


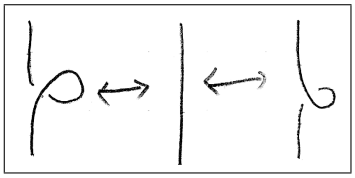
図 1.4

1 つの結び目に対して様々な射影図が考えられます。それらが互いに同じであることを、わざわざ 3 次元に戻すことなく言うにはどうすればよいのでしょうか。

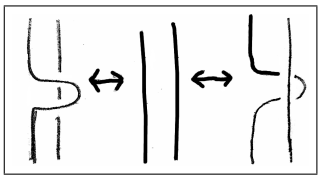
## 1.2　ライデマイスター移動

実は次に述べる 3 つの移動（これを**ライデマイスター移動**という）と、(射影図において）曲線が交わらない範囲での自由な移動（たとえば図 1.4）だけを用いて、ある結び目の射影図から別の結び目の射影図へ変えられるとき、この 2 つの結び目は同じと言えることがドイツの数学者ライデマイスターによって示されています。ここでは証明はしません。が、そのことを仮定して進めます。

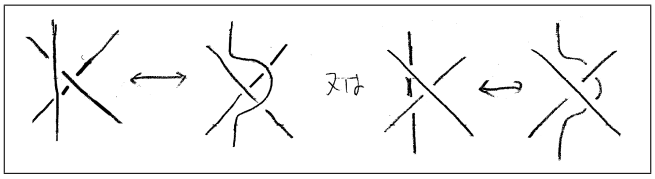
I. ひねる移動



II. ひっぱる、ひっこめる移動



III. ずらす移動



これで、結び目の相等については言えることができるようになりましたが、まだ 2 つの結び目が異なることが言えません。たとえば、三葉結び目が自明な結び目でないことすら、きちんと証明することはできません。[*3]

これについて、結び目の射影図に色をつけることで示す方法を次に紹介します。

## 1.3　3 彩色可能性

結び目の射影図において、結び目の一部であり、両端の交点では下を、それ以外では上を通っているような部分を道といいます。（図 1.5）

この各道を 3 色でぬることを考えます。ルールとして、

1. 各交点に集まる 3 つの道は（その中で重複があってもよい）すべて異なる色か、すべて同じ色
2. “1 色だけ用いる” ことは禁止

という物を考え、これを満たすならば、その射影図は 3 彩色可能と呼ぶことにします。

すると、実は 3 採色可能かそうでないかは射影図には因りません。これを示します。

ある結び目が 3 採色可能であるとします。これにどのライデマイスター移動をしても可能なままであることを示します。これが示せれば、3 採色可能でないものについても、背理法により不可能性が変わらないことが言えるので、証明は完成したことになります。

まず、I について（図 1.6）ですが、→ については、2 つに別れた道をもとと同じ色で塗れば、新たな交点ルール 1 を満たすし、2 を違反することもありません。← は、この交点についてルール 1 より、3 本の道（実際には 2 本）は同じ色でないといけないので、1 本につなげる時も同じ色にすれば、同様に大丈夫であることが言えます。

II と III については何パターンかが考えられるので図 1.3 に示しました。（3 色を R,G,B としています。）ただしルール 2 をちゃんと守っていることに注意してください。（I と同様）

以上よりどのライデマイスター移動でも 3 採色可能性は変わらないので、射影図に因らない

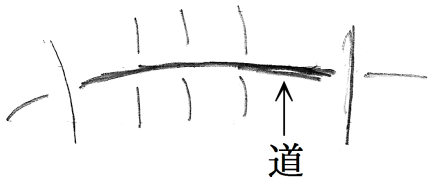



図 1.5

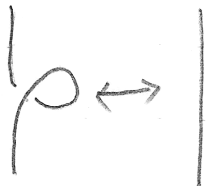
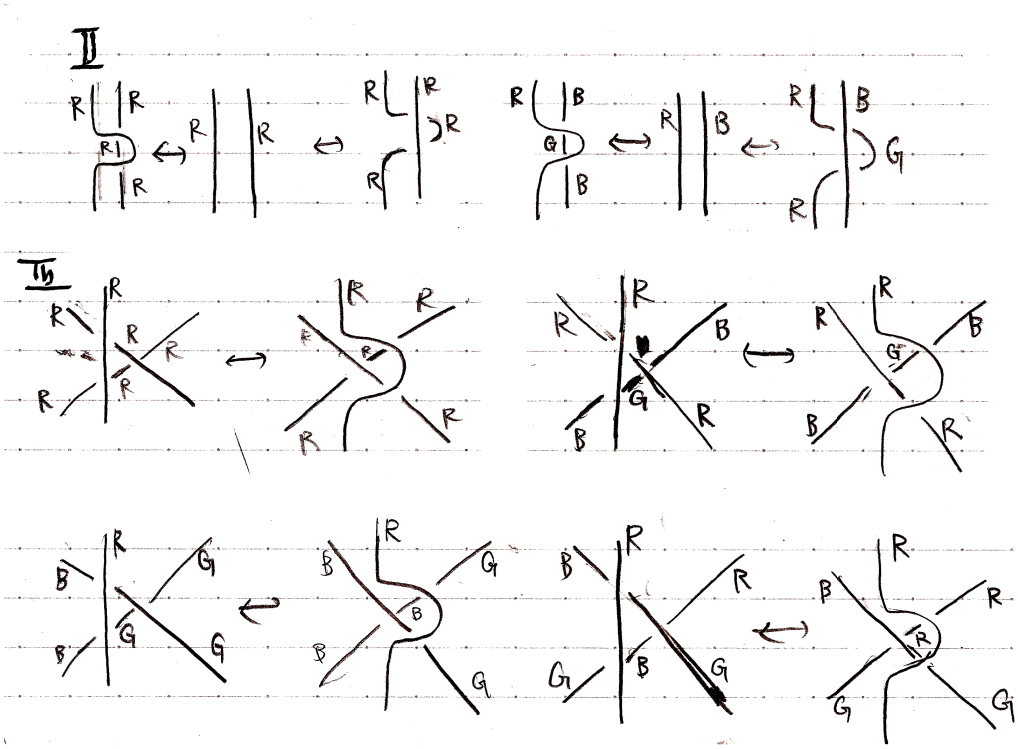


図 1.6

[*3] もちろんひもで考えればどうやってもほどけないので当たり前のようですが



ことが示せました。

この事実より、3 採色可能な結び目と、そうでないものは異なる結び目であるとわかります。さて、三葉結び目は 3 採色可能であり（図 1.7)、自明な結び目は明らかにそうでないので、三葉結び目は自明な結び目でないことがわかりました。

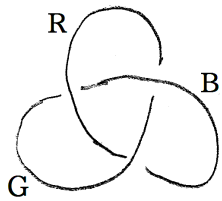



図 1.7

## 2　多項式の不変量

1.3 章でことなる結び目を区別するための方法として 3 採色可能性というものを紹介しました。では、その他の方法でもっと細かく区別するためにはどうするのでしょうか。その方法として、この章では多項式を用いた方法、特にブラケット多項式と $X$ 多項式について触れたいと思います。

ちなみにこれらの多項式は $x^5 - 2x^{-1} + x^{-4}$ のように次数が負のものも含む（可能性がある）ものとします。

また、3 採色可能性のときと同じように、これらは結び目の射影図について定義され、そこ

から不変性を考えていくことにします。

## 2.1　ブラケット多項式

ブラケット多項式には 3 つのルールがあります。
1 つめは「自明な結び目の自明な射影図は 1 とする」というもので、
2 つめは「交点の少ないものに帰着させる」もので、具体的には

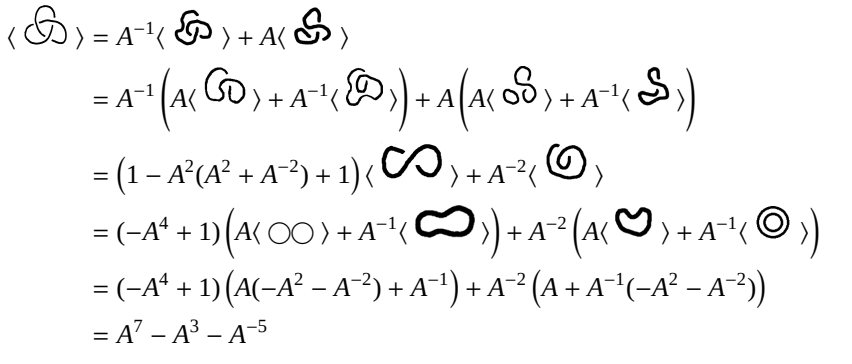
$$\langle \times \rangle = A\langle \supset\subset \rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle$$
$$\langle \times \rangle = A^{-1}\langle \supset\subset \rangle + A\langle \asymp \rangle$$

というものです。（ただし、$A$ は変数で、$\langle k \rangle$ で $k$ のブラケット多項式を表すとする。）
3 つめは、L を絡み目[*4]としたとき、「L に自明な結び目をくっつけると、L のブラケット多項式は、$-(A^2 + A^{-2})$ 倍される」というもので、式でかくと、

$$\langle L \cup \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle L \rangle$$

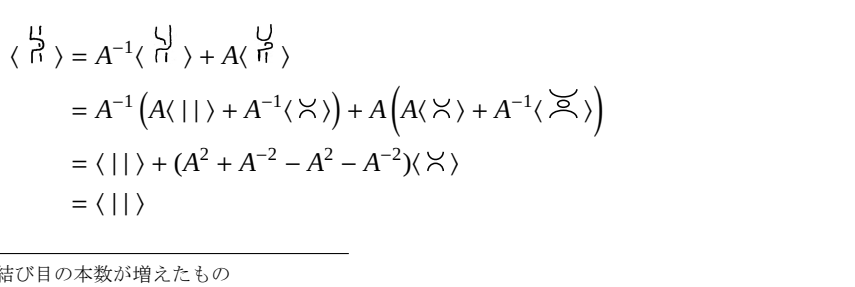
というものです。

この 3 つのルールで各射影図に対し、ブラケット多項式を定めます。例として、図 1.2 の三葉結び目のブラケット多項式を計算すると、



となります。

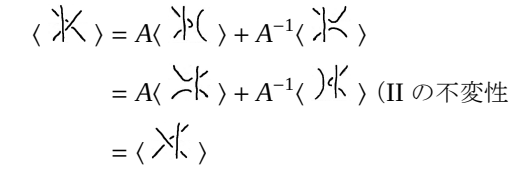
ではブラケット多項式をライデマイスター移動に適用してみましょう。まず II ですが、



[*4] 結び目の本数が増えたもの

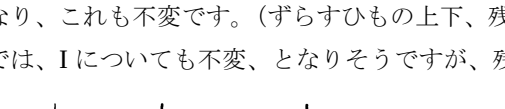
となり、うまく不変になります。（上下逆でも同様に成立します。）

また、III についてですが、



となり、これも不変です。（ずらすひもの上下、残り 2 本の上下を変えても同様に成立します）

では、I についても不変、となりそうですが、残念ながらこれは成りたちません。実際、



となります。

なので、ブラケット多項式は結び目の不変量とは言えません。

## 2.2　$X$ 多項式

ブラケット多項式はライデマイスター移動 II,III では不変です。そこで、これを利用して不変量となる多項式を完成させることを考えます。

ここで重要となってくるのが「ひねり数」です。これは結び目に対して一方向に矢印をつけ、各交点についてその交わり方で図 2.1 のように、$+1, -1$ の値を定め、それらを総和したものです。$K$ を結び目とするとき、このようにして定義されるKのひねり数を $w(K)$ と表します。たとえば、$w($ $) = -3$ です。[*5]

そして、各射影図のブラケット多項式を $(-A^3)^{-w(K)}$ 倍します。そうしてできた多項式を $X(K)$ とあらわすと、これは射影図によらない結び目の不変量となっています。そのことを今

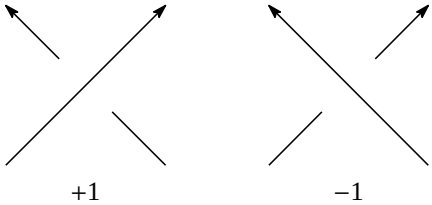



図 2.1

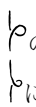
から確認しましょう。まず II についてですが、ブラケット多項式の部分についていま先ほど

[*5] ここで矢印のつけ方を逆にしても、$w(K)$ は同じ値になることに注意しましょう。

図 2.2

示したとおり不変なので、ひねり数の変化が問題となりますが、図 2.2 の 2 つの交点に対する数の和はでれも 0 なので問題ありません。また、III についてもすべての矢印のパターンについて、数の和が変化しないことが言えます。ここでは省略します。

そして I についてですが、



の交点に対する数は +1 なので、あわせて、$-A^3 \times (-A^3)^{-1} = 1$ 倍。

についても、$-A^{-3} \times (-A^3)^{-(-1)} = 1$ 倍となるので、不変になります。

これより、$X(K)$ は結び目の不変量となります。これを $X$ 多項式と呼びます。例によって三葉結び目について考えてみると、先程の計算より、$X$ 多項式は

$$(A^7 - A^3 - A^{-5})(-A^3)^3 = A^{16} - A^{12} - A^4$$

となります。

## 2.3　ステイト

さて、ブラケット多項式をより簡単に計算する方法はないのでしょうか。

よく考えると、わざわざ 1 つずつ交点を分離していく必要はなく、一気にすべて分離してやれば最後にブラケット多項式を計算する際の 3 つめのルールを使うだけで楽に計算できそうです。

その際、何回 $A$ 倍して何回 $A^{-1}$ 倍したかが問題です。各交点に対し、上側のひもを反時計回りに、2 本重ねるまで回したとき通過する部分を A 領域、そうでないところを B 領域とします。（図 2.3）そして、交点の分離において $A$ 領域をつなげる分離を **A 分離**、B 領域をつなげる分離を **B 分離**とよぶことにします。（図 2.4）すると、2 つめのルールを見直したとき、A 分離をすると $A$ 倍、B 分離をすると $A^{-1}$ していることがわかります。 分離の方法は 2 の（交点の数）乗ありその 1 つ 1 つをステイトと呼びます。そしてステイト $S$ について、その中の A 分離の個数を $a(S)$、B 分離の個数を $b(S)$、できるループの個数を $|S|$ としたとき、ブラケット多項式は

$$\sum_S A^{a(S)} A^{-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

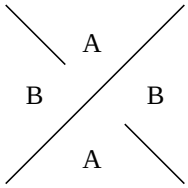



図 2.3

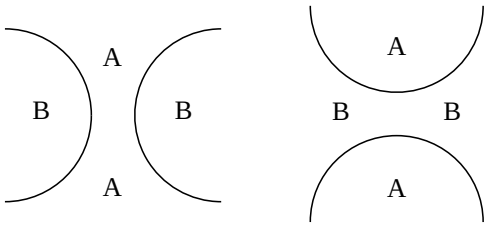



図 2.4

図 2.5

と表せます。

$X$ 多項式も、ステイトを用いて、

$$(-A^3)^{-w(k)} \sum_S A^{a(S)} A^{-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

と表せます。

実際に計算してみると、たとえば図 1.2 の三葉結び目の場合は図 2.5 より、

$$< \text{ } > = A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + 3A(-A^2 - A^{-2})^1 + 3A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A{-}2)$$
$$= A^7 - A^3 - A^{-5}$$

となります。また、他の結び目についても計算してみましょう。

三葉結び目の次に簡単な自明でない結び目として 8 の字結び目というものがあります（図 2.6）。これは、3 採色可能性では自明でないことがいえないですが、$X$ 多項式を用いて言うことが出来ます。ステイトを考えると、

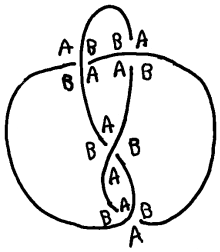



図 2.6

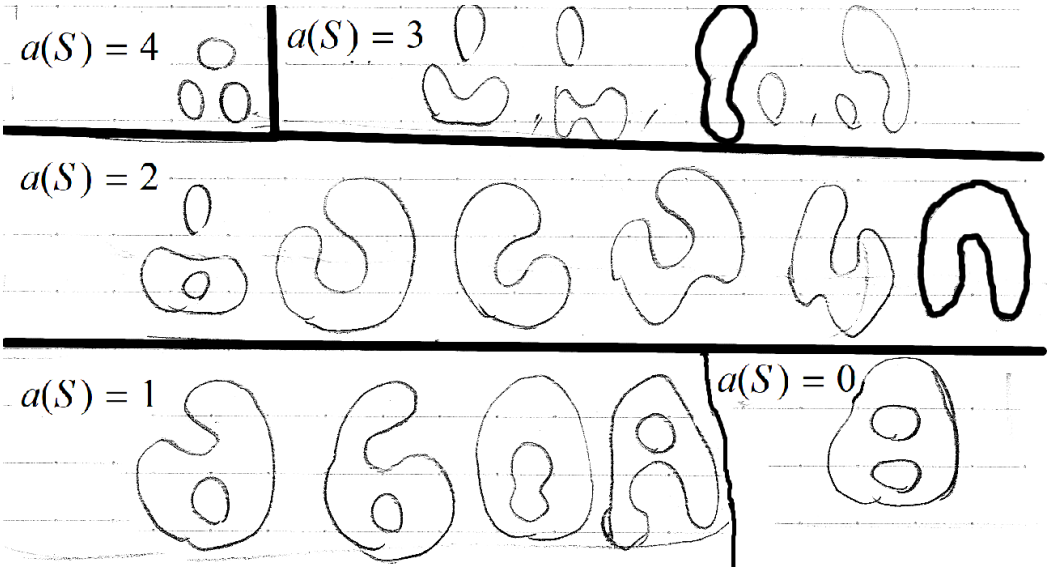



図 2.7

図 2.7 のようになり、ブラケット多項式は

$$A^4(-A^2-A^{-2})^2+4A^2(A^2-A^{-2})^2+(-A^2-A^{-2})^2+5(-A^2-A^{-2})^1+A^{-4}(-A^2-A^{-2})^2$$
$$=A^8-A^4+1-A^{-4}+A^{-8}$$

となり、またひねり数は 0 なので、$X$ 多項式も $A^8-A^4+1-A^{-4}+A^{-8}$ です。これより、8 の字結び目も自明でないことが言えます。

# 3　応用

## 3.1　両手型

この章では 2 章で紹介したブラケット多項式、$X$ 多項式の応用を見ていくことにします。まず両手型についてです。ある結び目の射影図について、交点の上下を全て入れ替えたものを考えます。（図 3.1）これがもとの結び目と同じになるとき、この結び目を両手型といいます。

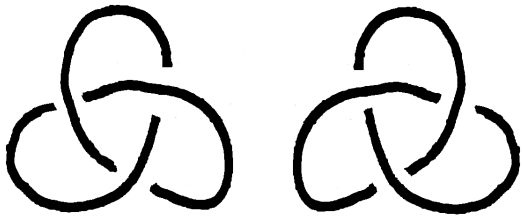


図 3.1

この性質は一見するとどんな結び目でも成り立ちそうですが、実際はそうではなく、たとえば図 3.1 の二つは同じものではありません。そのことを言うのに X 多項式が使えます。

上下を全て入れ替えると A 分離と B 分離は全て入れ替わり、またひねりは –1 倍されます。すると各ステイトと $(-A^3)^{-w(k)}$ はともに $A$ と $A^{-1}$ を入れ替えた形になるので、$X$ 多項式もそうなります。つまり両手型であることの必要条件として「$X$ 多項式とそれの $A$ と $A^{-1}$ を入れ替えたものは等しい」ことが挙げられます。

三葉結び目だと $X$ 多項式は $A^{16}-A^{12}-A^4$ で上下を入れ替えると $A^{-16}-A^{-12}-A^{-4}$ となって異なるので、三葉結び目は両手型ではありません。

一方、8 の字結び目だと $X$ 多項式は $A^8-A^4+1-A^{-4}+A^{-8}$ でこれは上下を入れ替えても

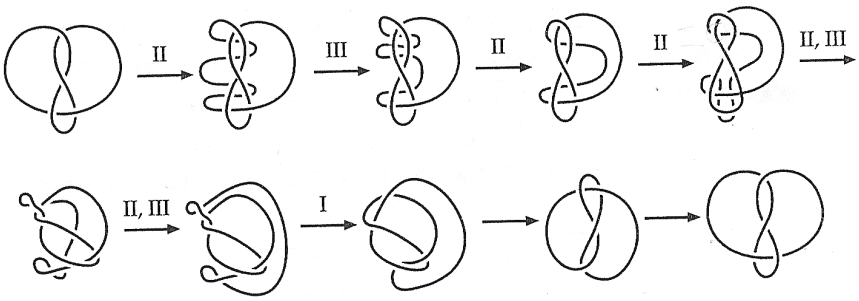



図 3.2

不変になります。実際図 3.2 のように動かすことで 8 の字結び目が両手型であることが分かります。

## 3.2　交点数と交代射影図

次に射影図の交点数について考えていきます。

結び目の複雑さは射影図の交点の数に比例するといえるでしょう。結び目がその意味で最も「簡単」になる、つまり交点数が最も減るのはどのような射影図のときなのでしょうか。

たとえば三葉結び目だと最小交点数は 3、8 の字結び目だと 4 になることは実験してみると分かります。また、その射影図としては今まで書いてきたものがあげられます。（図 3.3）

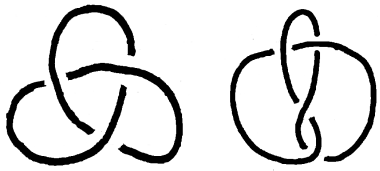


図 3.3

これらの特徴は何かと考えると、ひもをたどっていったとき、交点における上下が交互に現れることです。このような射影図を**交代射影図**といいます。

実はある結び目が交代射影図を持つとき、その射影図が最小交点数を実現する射影図であることがいえます。またそれはその結び目のどんな交代射影図についても言えます。たとえば図 3.4 は三葉結び目のいつもと異なる形の交代射影図ですが、交点数は確かに 3 です。

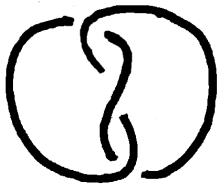


図 3.4

ただし、これらの交代射影図は既約でないといけません。既約というのはどの交点で分離しても、（A 分離でも B 分離でも）二つに分かれないような射影図のことです。図 3.5[*6]は既約でない交代射影図の例です。

以上をまとめて、次の命題を得ます。

[*6] 図につけた丸印の場所で分離します。図がわかりにくくて申し訳ありません。

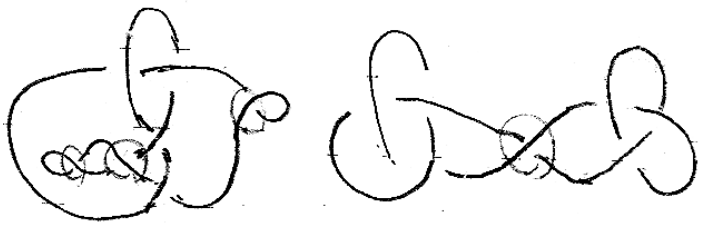


図 3.5

**命題 3.1.** ある結び目に付いて既約交代射影図が存在するとき、それらの交点数は等しく、またその交点数が最小交点数である。

**証明.** これを証明するのにブラケット多項式を使います。ブラケット多項式は結び目の不変量ではありませんが、これに $(-A^3)^{-w(k)}$ をかけたものは不変量なのでブラケット多項式の最大次数と最小次数の差は結び目の不変量です。この事実を用います。

最大次数について考えましょう。ステイト $S$ がブラケット多項式に寄与する項は $A^{a(S)}A^{-b(S)}(-A^2-A^{-2})^{|S|-1}$ でした。A 分離を含むステイトを考え、それの 1 つの A 分離を B 分離に変えたものを考えると、ある 2 つの $A^{a(S)}A^{-b(S)}$ の部分は 2 次減ります。

一方、$(-A^2-A^{-2})^{|S|-1}$ のほうですが、この操作によって二つの輪が一つになるか、一つの輪が二つになるので、輪の個数は 1 増えるか 1 減り、すなわち $(-A^2-A^{-2})^{|S|-1}$ の部分は 2 次増えるか 2 次減ります。

よって、操作後の A の次数は操作前の次数以下で、結局ブラケット多項式の最大次数は全て A 分離のステイト $S_A$ の最大次数以下といえます。同様に最小次数は全て B 分離のステイト $S_B$ の最小次数以上です。

よって、射影図の交点数を $n$ としたとき、そのブラケット多項式の次数差は、

$$(a(S_A)-b(S_B)+2(|S_A|-1))-(a(S_B)-b(S_B)+2(|S_B|-1))=2n+2|S_A|+2|S_B|-4$$

以下です。また、$|S_A|+|S_B|\le n+2$ であることが帰納法で示せます。

$n=0$ のときは $|S_A|=|S_B|=1$ なので両辺 2 になり成立。

$n=k$ での成立を仮定し $n=k+1$ のときを考えます。1 つの交点を A 分離し、残りを B 分離したステイトを $S_{B'}$ とすると帰納法の仮定より $|S_A|+|S_{B'}|\le k+2$ です。また、$|S_B|\le|S_{B'}|+1$ なので $|S_A|\le|S_{B'}|+1\le k+3$ となって $n=k+1$ でもいえました。

これより、最大次数と最小次数の差は $(2n+2(n+2)-4)=4n$ 以下です。

さて、この射影図が既約で交代だったときを考えましょう。各交点で A 領域のところに A,B 領域のところに B と記号を振ると、結び目のひもによって分かれる各領域について、その内部の記号が全て同じであることが分かります。（交代性より。図 3.6 参照。）

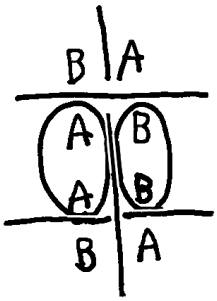



図 3.6

すると、ステイト $S_A$ について、記号 A は全てつながり、B も B だけで閉じるので、出来る円周は B だけの領域と 1 対 1 対応します。$S_B$ についても同様で、よって $|S_A| + |S_B|$ は結び目によって分かれる領域の総数といえます。

さて、この射影図のある平面を球面に射影して Euler の公式を使うと、頂点は $n$、変は各頂点から 4 本出るので $4n/2 = 2n$ なので面は $n + 2$ 個といえます。すなわち $|S_A| + |S_B| = n + 2$ です。

また、ステイト $S_A$ について、1 つを B 分離に変えたステイトを考えると、$|S_A| > |S_{A'}|$ です。なぜなら、$|S_A| \leq |S_{A'}|$ とすると、B 分離で円周が 1 つ増えたことになりますが、すると、その A を B に変えた交点について、その B 領域 2 つともを 1 つの円周が含むことになり、$S_A$ における円周はもとの図の区切られた領域と対応していて、つまりもとの図においてある交点の 2 つの B 領域を含むような区切られた領域が存在しますが、これは既約性に反するからです。

よって、ブラケット多項式の次数差の議論において、すべて等号が成立することになり、ある結び目に交点数 $n$ の既約交代射影図が存在するならば、その結び目のブラケット多項式の次数差は $4n$ となります。複数存在するなら同様に交点数は $n$ となり、また交点数がこれ未満に減ると仮定すると次数差が $4(n-1)$ 以下になり矛盾するので、$n$ が最小交点数です。 □

この定理により、どんな射影図を描いてもそれが既約で交代ならば、その射影図の交点は減らすことが出来ないことが言えました。[*7]

たとえば、図 3.7 のような複雑な結び目でも、これが既約交代射影図であることからこの結び目の射影図における最小交点数を実現していることが分かるのです。

[*7] なかなかすごい結果だと個人的には思うなの！

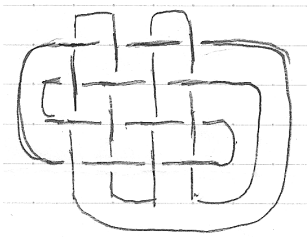


図 3.7

# 4　あとがき

下手な文章でしたが最後までお読みいただきありがとうございました。

参考文献として [1] をあげておきます。ここで扱った話題以外にも結び目についてのさまざまなトピックが分かりやすく解説されています。興味をもたれた方はぜひ読んでいただいてはいかがでしょうか。（但し絶版ですが…）

また、図 3.2 は [1] から引用しました。

# 参考文献

[1] C.C アダムス著金信泰造訳「結び目の数学」（培風館 、1998）