フィボナッチ数列の整数多項式

高校 3 年 3 組 21 番　黒住篤優

0　はじめに

本日は灘校数学研究部にお越しいただきありがとうございます。

さて今回はフィボナッチ数列の恒等整数多項式にしました。”こんなの知ってるよ””簡単すぎるよ”などという言葉が発せられるかもしれませんが、息抜きのつもりで呼んでいただけるとうれしいです。

1　問題提起

この章では、この記事で考える問題をあげることにします。

問題 1. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ という数列を考える。*(*a_1, a_2 は実数*)*

このとき、x を正の整数範囲で動かすと $f(a_x, a_{x+1}, \ldots, a_{x+N})$ が一定値を取るような整数係数多項式 f を求めよ。*(ただし* N *は十分大きい整数)*

多項式:変数の非負整数乗をかけあわせたり、たしたり、ひいたりした式

f の例としましては $f(a_x, a_{x+1}, a_{x+2}) = (a_x a_{x+2} - a_{x+1}^2)^2$ です。実際に代入してみてください。

まず§ 2 でこの問題を解き、§ 3 以降でちがう観点からこの問題を見ていくことにします。

2　解

ここで $f(a_x, a_{x+1}, \ldots, a_{x+N})$ は、$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ なので、$F(a_x, a_{x+1})$ という整数係数多項式 F に書き換えることができる。また 1 章でも軽く触れたが n が奇数、偶数のとき $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$ がそれぞれで一定であり、(奇数のときの値)+(偶数のときの値)=0 となるこ

とをまず示す。

$$\begin{aligned}a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}^2&=a_{n+1}(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+2}^2\\&=a_{n+1}^2-(a_{n+2}-a_{n+1})a_{n+2}\\&=-a_na_{n+2}+a_{n+1}^2\end{aligned}$$

よって示された。

これより $\{a_na_{n+2}-a_{n+1}^2\}^2$ は一定になることがわかった。ここで、$F(a_x,a_{x+1})$ の x が非負整数全体を動くときに一定となる F を求めよというのは、その $F(a_x,a_{x+1})$ から $F(a_1,a_2)$ を引けば 0 となるので、$F(a_x,a_{x+1})=0$ となる多項式 (定数項だけは実数で変数項の係数は整数) を求めるのと同値である。(やることが同じという意)

ここで $(a_1^2+a_1a_2-a_2^2)^2=h^2$ とすると、

$$F(x,y)=(x^2+xy-y^2)^2-h^2 \quad (a_x\text{を }x\text{、}a_{x+1}\text{を }y\text{ に書き換えた})$$

は題意を満たす多項式である。ここで $F(x,y)=0$ の最小多項式が $(x^2+xy-y^2)-h^2$ でないとする。

$$(x^2+xy-y^2)^2-h^2=(x^2+xy-y^2+h)(x^2+xy-y^2-h)$$

であり、$F(x,y)$ を $x+xy-y^2+h, x^2+xy-y^2-h^2$ で割ってあまった多項式を $g(x,y),h(x,y)$ とおくと、$g(x,y),h(x,y)$ はどちらも x の次数が 1 次以下にすることができ、$g(x,y)\neq 0,h(x,y)\neq 0$ ならば、$F(x,y)\neq 0$ なのでどちらかが 0 にならなければならないが x の次数が 1 以下なので不可能。

($\because$ ここで $g(x,y)h(x,y)=0$ となるので、

$$g(x,y)h(x,y)=g(y,x+y)h(y,x+y)$$

ここで $g(x,y)h(x,y)$ に x^ty^s が含まれているとき、$g(y,x+y)h(y,x+y)$ がこの x^ty^s に値するのは $y^t(x+y)^s$ となり、x,y の次数を足し合わせると $s+t$ となるので、次数の和としては変化しない。よって各項の次数の和が一定である多項式を考えればよい。そのような多項式 $g(x,y)h(x,y)$ だとすると x の次数は 2 以下なので、

$$g(x,y)h(x,y)=k_1x^2y^m+k_2xy^{m+1}+k_3y^{m+2}$$

ここで $g(x,y)h(x,y)$ と $g(y,x+y)h(y,x+y)$ の項を見比べると、$k_1=k_2=k_3=0$ でなくてはならないことが即座にわかる。)

よって $(x^2+xy-y^2)^2-h^2$ は $F(x,y)$ の最小多項式となるので、$a_x^2+a_xa_{x+1}-a_{x+1}^2=g(x)$ とおくと、

$$F(a_x,a_{x+1})=b_k\{g(x)\}^{2k}+b_{k-1}\{g(x)\}^{2k-2}+\cdots+b_1\{g(x)\}^2+b_0 \quad (b_k,b_{k-1},\ldots,b_0\text{は整数})$$

となる。 $\square$

3　別視点 1

あまりにもあっさりしていて「何だこの問題見掛け倒しじゃん」と思った方も多いと思います。そこでこの章以降ではこの問題に真正面からぶつかっていこうと思います。

まずこの章では 2 章で置き換えた $F(x,y)$ が x^2+xy-y^2 で因数分解でき、$F(x,y)=0$ の解は $x^2+xy-y^2=0$ の解に限る (実数範囲で) ことを示そうと思います。

証明. まず x^2+xy-y^2 で $F(x,y)$ が因数分解できることを示す。x^2+xy-y^2 で因数分解できるのならば $x^2+xy-y^2=0$ のとき $F(x,y)=0$ となる。

そのような y を求めると $y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}x$ である。

ここで $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ のとき、逆上っていくと ($a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ の操作を逆にたどっていくの意)

$$\left(x,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\leftarrow\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x,x\right)\leftarrow\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}x,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)$$
$$\leftarrow\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}x,\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}x\right)\leftarrow\left(\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x,\frac{7-3\sqrt{5}}{2}x\right)\leftarrow\dots$$

これを見てわかるように、$A_1=1,A_2=1,A_{n+2}=A_{n+1}+A_n,B_1=1,B_2=3,B_{n+2}=B_{n+1}+B_n$ という 2 つの数列 A_n,B_n を持ってくると、この逆上った数の組は

$$\left(\pm\left(\frac{A_N\sqrt{5}-B_N}{2}\right)x,\mp\left(\frac{A_{N-1}\sqrt{5}-B_{N-1}}{2}\right)x\right) \tag{1}$$

となる。

ここで $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ の一般項は

$$\sqrt{5}a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(a_2+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a_1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(a_2+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a_1\right)$$

なので、(わからない人は数 IIB をチェック!!)

$$\sqrt{5}A_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\sqrt{5}N_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\sqrt{5}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\sqrt{5}$$

となる。ここで n を無限大にすると $-1<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<1$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5}A_n-B_n)=0$$

となる。

よって (1) より逆上っていくと (0,0) に限りなく近い数の組が出てくる。ここで $F(0,0)=0$ であり ($\because F(x,y)$ は (x^2+xy-y^2) を因数にもつ) $F(x,y)$ は x,y で連続であるので $F(x,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x)$ の値は 0 に限りなく近いものになる。

$G(x,y)=0$ の解が $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ となる整数多項式 G の最小多項式は $G(x,y)=x^2+xy-y^2$ より

$$F(x,y)=G(x,y)H(x,y)+y^M(M_1x+M_2y)$$

のようにかけ (M_1,M_2 は整数)、$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ のとき $F(x,y)$ は 0 に限りなく近い。また y^M は $x\neq 0$ のとき 0 でない数であるので M_1x+M_2y を限りなく 0 に近づけなければならない。これが不可能であることは M_1,M_2 が整数であることから不可能。

以上より $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ の時 $F(x,y)=0$ となるので $F(x,y)$ は最小多項式 x^2+xy-y^2 で割り切れることがわかった。 □

次に $F(x,y)=0$ の解は $x^2+xy-y^2=0$ の解に限る (実数範囲で) ということを示す。ここで $F(x,y)$ に x^ty^s を含んでいるとき $F(y,x+y)$ がこの x^ty^s に値するのは $y^t(x+y)^s$ となり、x,y の次数を足し合わせると $s+t$ となるので、次数の和としては変化しない。よって以下次数の和が一定の項でできた $F(x,y)$ について考える。

ここで $F(x,y)=0$ の解を $y=kx$ とおく。(k は実数) すると逆上った組

$$(x,kx)\leftarrow(kx,(k+1)x)\leftarrow((k+1)x,(2k+1)x)\leftarrow\ldots$$

を $\dfrac{y}{x}$ の値に応じ左から $c_1,c_2,\ldots$ という数列 c_n に書きかえると、$c_1=k, c_{n+1}=1+\dfrac{1}{c_n}$ となる。これを解くと

$$\frac{c_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{c_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{c_n-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{c_n-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

(わからない人は数 II B をチェック!!) より $c_1\neq\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である限り $\dfrac{c_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{c_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ は 0 でない実数となり $\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ は何回かけても 1 にならないので数列 c_n はどの項も同じ数字はないすると $F(x,y)=0$ のときの y の解が無限個存在してしまうことになるので $F(x,y)=0$ の解は有限個であることより矛盾。よって $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}x$ に限る。 □

4　別視点 2

$F(a_x, a_{x+1})$ が一定ということは $F(x,y) = F(y, x+y)$ となればよいということより単純に得られる等式を述べ、§ 2 で得られた解から考えられる結果をこの章では書こうと思います。

ここで $F(x,y)$ に $x^t y^s$ を含んでいるとき $F(y, x+y)$ がこの $x^t y^s$ に値するのは $y^t (x+y)^s$ となり、x, y の次数を足し合わせると $s+t$ となるので、次数の和としては変化しない。よって次数の和それぞれで関数 F を考えればよいということになる。(3 章で使った関数です)

これらより

$$F(x,y) = x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n \quad (a_1, \dots a_n \text{は有理数})$$

とおき、この x に y、y に $x+y$ を代入して係数を比較すると

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_n & = & 1 & + & {}_1C_0 a_1 & + & {}_2C_0 a_2 & \cdots & + & {}_nC_0 a_n \\
a_{n-1} & = & & & {}_1C_1 a_1 & + & {}_2C_1 a_2 & \cdots & + & {}_nC_1 a_n \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \\
a_1 & = & & & & & & {}_{n-1}C_{n-1} a_{n-1} & + & {}_nC_{n-1} a_n \\
1 & = & & & & & & & & {}_nC_n a_n
\end{array}$$

これより、

$$\begin{pmatrix}
1 & {}_1C_0 & {}_2C_0 & \cdots & \cdots & {}_nC_0 - 1 \\
0 & {}_1C_1 & {}_2C_1 & \cdots & {}_{n-1}C_1 - 1 & {}_nC_1 \\
\vdots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & {}_nC_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

n($F(x,y)$ の次数) のとき、$F(x,y)$ が存在するならば、上式の一番左の行列 A は 0 とならなければならない。よって、n が 4 の倍数の時、(A の行列式) $= 0$ となる。($\because$ 2 章) 実際にやってみてください。(自分は $n = 4$ で挫けました・・・)

5　最後に

これでおわりです。最後まで読んでくださった方ありがとうございました。なかなかくせがなく読みやすかったのではないでしょうか。(読みにくかった人は自分の国語力のなさが原因です。スイマセン) この記事にはかけませんでしたが $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ の数列の多項式なども考えてみてください。

さて、私黒住は今年度高３になりましたので、文化祭で携わるのは今回で最後です。今は昔、自分が一番はじめに書いた部誌のテーマとしてあげた未解決問題コラッツ問題も今や元未解決になってしまいました。早いものですね。これで終わりかと思うとかなしさもありますが、中学、高校時代を振り返ってみると自分のやりたいことを貫き通せた満足感も多少あります。

数研では中には変な人もいましたが (笑)、上下関係もなく仲間と切磋琢磨しながら数学を楽しめました。感謝感謝です。文化祭で数研に来て下さっている人の中には灘志望の小学生も多いと思いますが、ぜひお勧めです。

といったところで終わりにしたいと思います。最後までありがとうございました。

この部誌で不明点などありましたら、suuken96@yahoo.co.jp のほうにメールしてください。