n 乗和の基本対称式での表し方について

高校 2 年 2 組 21 番 重村 卓人

1　はじめに

本日は数学研究部に来ていただきありがとうございます。このページ群では、n 乗和の基本対称式での表し方について扱います。例えば $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ のようなものです。実はこの文章は最後に書いていますがそんなことはどうでもいいので、ごゆっくりどうぞ。

2　準備

非負整数の集合を $\mathbb{N}_0$、m 変数 n 乗和を $f_m(n)$ と書くことにする。（例えば、$f_3(2)=a^2+b^2+c^2$）

定理 2.1 (対称式の基本定理)**.**
「全ての対称式は、基本対称式（と定数と加算と乗算）を使って一意的に表せる」という定理です。証明は省きますが、いろんな本やサイトに証明が乗っているので、興味がある方は調べてみてください。

3　$f_2(n)$

a^n+b^n を $x=a+b, y=ab$ で表す事が目的である。その方法は、対称式の基本定理より、一通りである。

$$\begin{aligned}
&f_2(0)=a^0+b^0=2\ ,\ f_2(1)=x\\
&f_2(n)=(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab(a^{n-2}+b^{n-2})\\
&\qquad\ \ =xf_2(n-1)-yf_2(n-2)\quad (n\geq 2)
\end{aligned}$$

これが漸化式だが、普通に解くと a と b が出てきて逆戻りになってしまうので、別のアプローチをする。

$$f_2(n)=\begin{cases} k_0x^n+k_1x^{n-2}y+k_2x^{n-4}y^2+\cdots+k_{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}} & (n：偶数)\\ k_0x^n+\cdots+k_{\frac{n-1}{2}}xy^{\frac{n-1}{2}} & (n：奇数)\end{cases}$$

と表せる。

即ち a, b の次数（$b = a$ とした時の a の次数）が n のものしか現れないという主張である。理由を以下に示す。

帰納法を使えば、$n = 1, 2$ で正しく、$xf_2(n-1)$ も $yf_2(n-2)$ も a, b の次数が n になる。$f_2(n)$ は対称式なので x と y での表し方は 1 通りしかなく、よって示された。

この係数 k_i を求めたい。実験をして予想する。

$$f_2(6) = x^6 - 6x^4y + 9x^2y^2 - 2y^3$$

図を描くと、

i	0	1	2	3
k_i	1	-6	9	-2
$(-1)^i k_i$	1	6	9	2
${}_{6-i}C_i$	1	5	6	1
$\dfrac{(-1)^i k_i}{{}_{6-i}C_i}$	1	$\dfrac{6}{5}$	$\dfrac{3}{2}$	2

この、 $1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, 2$ が $\dfrac{6}{6-i}$ に一致するので、$k_i = (-1)^i \cdot \dfrac{6}{6-i} \cdot {}_{6-i}C_i$ と予想できる。

つまり、x, y の次数を β とおくと、$(\beta = i)$

$$f_2(n) = \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0}} (-1)^i \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^\alpha y^\beta$$

（α, β は 0 以上の整数で、$\alpha + 2\beta = n$ となるような全ての α, β を動く）

言い換えると、

$$\sum_{\alpha+2\beta=n} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^\alpha y^\beta$$

となりそうである。（ここからは特に指定の無い限り、$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ とする）これを帰納法で示す。

（証明）

i) n が偶数で、$n-2, n-1$ 共に成立している時 $(n \geq 4)$

$$\begin{aligned} f_2(n) &= xf_2(n-1) - yf_2(n-2) \\ &= \sum_{\alpha+2\beta=n-1} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^{\alpha+1} y^\beta \\ &\quad - \sum_{\alpha+2\beta=n-2} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^\alpha y^{\beta+1} \end{aligned}$$

上の段の α を $\alpha+1$ に、下の段の β を $\beta+1$ に置き換えて、

$$f_2(n) = \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha=2,4,\cdots,n-2}} (-1)^\beta \left(\frac{\alpha+2\beta-1}{\alpha+\beta-1} {}_{\alpha+\beta-1}C_\beta + \frac{\alpha+2\beta-2}{\alpha+\beta-1} {}_{\alpha+\beta-1}C_{\beta-1} \right) x^\alpha y^\beta + (-1)^{\frac{n}{2}} 2y^{\frac{n}{2}} + x^n$$

ここで、

$$\frac{\alpha+2\beta-1}{\alpha+\beta-1} - \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\alpha+2\beta-2}{\alpha+\beta-1} - \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} = \frac{-\alpha}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)}$$

より、

$$\begin{aligned} f_2(n) = &\sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha=2,4,\cdots,n-2}} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} ({}_{\alpha+\beta-1}C_\beta + {}_{\alpha+\beta-1}C_{\beta-1}) x^\alpha y^\beta \\ &+ \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha=2,4,\cdots,n-2}} (-1)^\beta \frac{\beta_{\alpha+\beta-1}C_\beta - \alpha_{\alpha+\beta-1}C_\alpha}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)} x^\alpha y^\beta + 2\cdot(-1)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}} + x^n \end{aligned}$$

また、

$${}_{\alpha+\beta-1}C_\beta + {}_{\alpha+\beta-1}C_{\beta-1} = {}_{\alpha+\beta}C_\beta$$

$$\beta_{\alpha+\beta-1}C_\beta - \alpha_{\alpha+\beta-1}C_\alpha = \beta\frac{(\alpha+\beta-1)!}{\beta!(\alpha-1)!} - \alpha\frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!(\beta-1)!} = 0$$

より、

$$\begin{aligned} f_2(n) &= \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha=2,4,\cdots,n-2}} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^\alpha y^\beta + \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha=0,n}} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^\alpha y^\beta \\ &= \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha=0,2,\cdots\cdots n}} (-1)^\beta \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^\alpha y^\beta \end{aligned}$$

ii) n が偶数で、$n-2, n-1$ 共に成立している時 $(n \geq 3)$

i) と同様に (違いはシグマが足し合わせる項がちょっとずれるだけ) 示せるので、省略。

iii) $n = 1, 2$ の時

上で見たように成立している。

よって、

$$f_2(n) = \sum_{\substack{\alpha+2\beta=n \\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}}} (-1)^\beta \frac{n}{\alpha+\beta} {}_{\alpha+\beta}C_\beta x^\alpha y^\beta \quad (n > 0)$$

□

4　$f_3(n)$

　$x = a+b+c, y = ab+bc+ca, z = abc$ で $a^n + b^n + c^n$ を表す。

$$f_3(0) = 3\ ,\ f_3(1) = x\ ,\ f_3(2) = x^2 - 2y$$

$$\begin{aligned} f_3(n) &= (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c) + 3abc \\ &= x f_3(2) - y f_3(1) + z f_3(0) \end{aligned}$$

3 を $f_3(0)$ と書いたのは、4 項間漸化式になりそうだからである。実際、

$$\begin{aligned} f_3(n) &= (a+b+c)(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}) - (ab+bc+ca)(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}) \\ &\qquad + abc(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3}) \\ &= x f_3(n-1) - y f_3(n-2) + z f_3(n-3) \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

となる。f_2 同様、x, y, z の次数をそれぞれ α, β, γ とおくと、$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n$ となる。f_2 の式の ${}_{\alpha+\beta}C_{\beta}$ を一般化したいのだが、

$${}_{\alpha+\beta}C_{\beta} = \frac{(\alpha+\beta)\,!}{\alpha!\,\beta!}$$

より、

$$\frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_k\right)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{m} p_k!}$$

となる。組み合わせ的にもこう考えることができる。

　よって、f_2 と同じような式を作ると、

$$f_3(n) = \sum_{\substack{\alpha+2\beta+3\gamma=n \\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0}} (-1)^{\beta} \frac{(\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)\,!}{(\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

$(-1)^{\beta}$ の部分は実験して確かめた。β になるのは、漸化式の y の部分が負になっているからである。この式を示す。

$$(-1)^{\beta} \frac{(\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)\,!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

の $\alpha = p,\ \beta = q,\ \gamma = r$ での値を (p, q, r) と書くことにする。

漸化式と対称式の基本定理より、$f_3(n)$ のある項 $(p,q,r)x^p y^q z^r$ （係数が 0 の可能性もあるが）については、漸化式の右辺で見れば、$f_3(n-1)$ では x がかかっているので、$(p-1,q,r)$ を、同様に、$f_3(n-2)$ では $(p,q-1,r)$ を、$f_3(n-3)$ では $(p,q,r-1)$ のみを考えればよい。（但し p,q,r が正整数の時に限る）

即ち、$(p,q,r) = (p-1,q,r) - (p,q-1,r) + (p,q,r-1)$ を示せばよい。まずはこれを示す。

$$\begin{aligned}
(p,q,r) &= (-1)^q \frac{n(p+q+r-1)\,!}{p!\,q!\,r!} \\
(p-1,q,r) &= (-1)^q \frac{(n-1)(p+q+r-2)\,!}{(p-1)!\,q!\,r!} \\
(p,q-1,r)^{*1} &= (-1)^{q-1} \frac{(n-2)(p+q+r-2)\,!}{p!\,(q-1)!\,r!} \\
(p,q,r-1) &= (-1)^q \frac{(n-3)(p+q+r-2)\,!}{p!\,q!\,(r-1)!} \\
(p-1,q,r) &- (p,q-1,r) + (p,q,r-1) \\
&= (-1)^q \frac{(n-1)p + (n-2)q + (n-3)r}{p!\,q!\,r!}(p+q+r-2)! \\
&= (-1)^q \frac{n(p+q+r) - (p+2q+3r)}{p!\,q!\,r!\,(p+q+r-1)}(p+q+r-1)\,! \\
&= (p,q,r) \quad (\because n = p+2q+3r)
\end{aligned}$$

また、p,q,r のどれか 1 つ以上が 0 でも、$\dfrac{1}{(p-1)!} = \dfrac{p}{p!}$ としてしまえばこれは 0 になり、上の式を見ればこれでうまくいく[*2]事が分かる。よって、

$$f_3(n) = \sum_{\substack{\alpha+2\beta+3\gamma=n \\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0}} (-1)^\beta \frac{n(\alpha+\beta+\gamma)\,!}{(\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!} x^\alpha y^\beta z^\gamma \quad (n > 0)$$

□

5 $f_m(n)$

$s_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,\ s_2 = a_1a_2 + \cdots + a_{m-1}a_m,\ s_n = a_1a_2\cdots a_m$ と、s_k を k 次の基本対称式とする。先ほどまでと同様に、

$$f_m(n) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} s_k f_m(n-k) \quad (n \geq m)$$

[*1] ここのみ正負がずれるのが $(-1)^\beta$ の理由である。

[*2] 例えば $q = 0$ なら、$(p,q-1,r)x^p y^{q-1} z^r$ がなくなるのだが、このように計算すれば 0 になり問題が無い

s_k の次数を q_k とおくと、

$$f_m(n) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{m} kq_k = n \\ \forall q_k \in \mathbb{N}_0}} \left\{ (-1)^g \frac{n\left(\sum_{k=1}^{m} q_k\right)!}{\left(\sum_{k=1}^{m} q_k\right)\left(\prod_{k=1}^{m} q_k!\right)} \cdot \prod_{k=1}^{m} s_k^{q_k} \right\} \quad \left(\text{但し、} g = \sum_{k=1}^{[\frac{m}{2}]} q_{2k} \right)$$

となることを示す。

4 と同様の議論で $(p_1, p_2, \cdots\cdots p_m)$ を定義し、

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m) = (p_1 - 1, p_2, \ldots, p_m) - (p_1, p_2 - 1, \ldots, p_m) + \cdots + (-1)^{m+1}(p_1, p_2, \ldots, p_m - 1)$$

を証明すればよい。

$$\text{（左辺）} = (-1)^g \frac{n\left(\sum_{l=1}^{m} p_l - 1\right)!}{\prod_{k=1}^{m} p_k!}$$

$$\text{（右辺）} = (-1)^g \frac{\sum_{i=1}^{m} (n-i)p_i}{\prod_{k=1}^{m} p_k!} \left(\sum_{l=1}^{m} p_l - 2\right)!$$

となるので、

$$n\left(\sum_{l=1}^{m} p_l - 1\right) = n\left(\sum_{l=1}^{m} p_l\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} kp_k\right)$$

を示せばよいが、$\sum_{k=1}^{m} kp_k = n$ よりこれは示された。 □

6　あとがき

この部誌は少しの数学と TEX と多大なる文化委員会など多くの人の寛大な心でできています。締切りとは何だったのか。5 章がある今 3,4 章は要らないのではないかという説が頭の中に芽生えていますがいきなり n について言うのも分かりにくいかと思ったのでこの様な構成になりました。決して一般化したものがギリギリまで解けなくて 2 と 3 をやってみてもったいないから載せたんじゃないです。違いますとも。この部誌は同級生の藤村くんに打ち込みの調整をしてもらいました。ありがとうございます、これ去年も書いたな。みんな TEX やろう!