幾何的双対性

高校 3 年 2 組 18 番　北村拓真

1　はじめに

本日は灘校文化祭にお越しいただきありがとうございます。この記事では、幾何的双対性について扱います。双対性は数学や物理などいろんな学問、理論のなかで重要な概念です。今回は特に幾何の分野での双対性について書きたいと思います。

2　極と極線

平面の幾何の中で双対性が表れるものとして、極と極線の関係があります。それについて考えていきましょう。

まず、極と極線を定義します。円 O を描き、その外部に点 X をとります。X から円 O への 2 本の接線をひき、接点をそれぞれ A,B としたとき、直線 AB を X の円 O に関する**極線**と呼び、X を**極**と呼びます。

極と極線に関する基本的な性質として、次のものが挙げられます。

性質 1. 点 X の円 O に関する極線上に点 Y をとったとき、Y の円 O に関する極線は X を

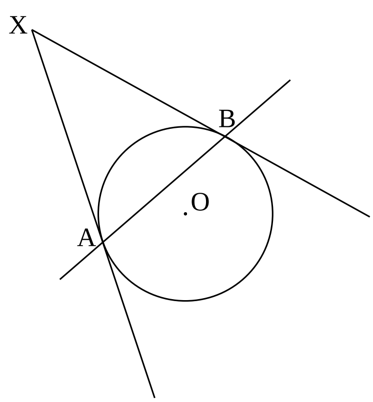

図 1

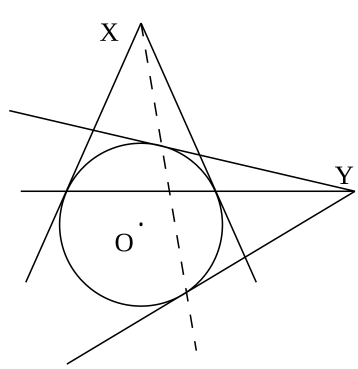

図 2

通る。

ここでは X,Y が円 O の外部にあるものとして、この性質を示します。

円の半径 r、X から円 O へ引いた接線の接点の 1 つを A、X の極線（l とする）と OX の交点を X′ とすると、$\triangle OXA \sim \triangle OAX'$ より、$OX \cdot OX' = OA = r^2$ となります。

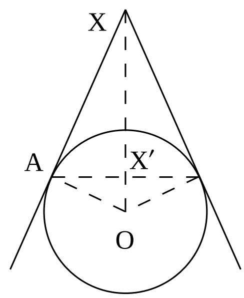

図 3

Y についても同様に Y の極線（m とする）と OY の交点を Y′ とすると、$OY \cdot OY' = r^2$ が成り立ち、方べきの定理の逆より、X,X′,Y,Y′ は共円と言えます。

また、$OX \perp l$ より $\angle YY'X = \angle YX'X$（さっきの共円より）$= 90^\circ$ となり、$OY \perp m$ より X は m 上にあるといえます。

さて、以後極が内側（境界含む）にある場合も扱いたいのですが今の定義ではまだ対応できません。そこで、上の証明で使った X′ を用いることにします。すなわち、円 O の内部にある点 X（ただし $X \neq 0$ とする）について、円 O の半径を r としたとき、X′ を半直線 OX 上の $OX \cdot OX' = r^2$ なる点とし、X′ を通り OX に垂直な直線を極 X の円 O に関する極線とします。特に、X が円周上にある場合、極線は X における接線と言えます。

この定義によって、円の中心を除いた平面上の全ての点に対して、それを極とした極線を考えることができました。また、$OX \cdot OX' = r^2$ より性質 1. は X,Y が円の内側にある場合も同様に示すことができます。[*1]

次に、重要となる性質を挙げます。

性質 2. X,Y の極線を l, m としたときｍ l と m の交点 Z の極線は直線 XY となる。

これを示すために、円の中心 O を原点とする座標を考え、極と極線の式の上での関係をみます。ただし、ここで円 O は単位円とします。（以後同じ）

$X : (\alpha, \beta)$ とすると、極線 l は OX と垂直なので、

$$l : \alpha x + \beta y = a \ (a : \text{定数})$$

と表せます。また、l と OX の交点 X′ は $OX \cdot OX' = 1$ をみたすので、$X' : \left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$ と表せ、したがって、

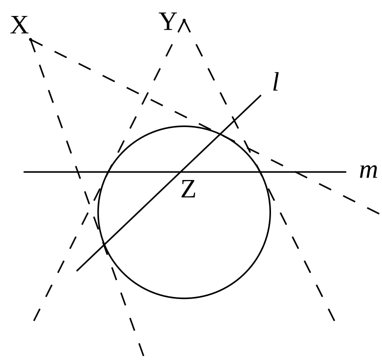

図 4

$$a = \alpha \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \beta \cdot \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

[*1] 以後円 O を固定し、極線は円 O に関するものとします。

となります。つまり、点 $X:(\alpha,\beta)$ の極線は

$$\alpha x+\beta y=1$$

このことを用いて性質 2. を示します。

$X:(\alpha_1,\beta_1),\ Y:(\alpha_2,\beta_2),\ Z:(\alpha_3,\beta_3)$ としたとき、Z は X,Y の極線上にあるので

$$\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3=1,\ \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3=1$$

が成り立ちます。すると、直線 $\alpha_3 x+\beta_3 y=1$ は X,Y を通るといえ、したがって Z の極線は直線 XY といえました。

一方、この性質の逆として、

性質 $2'$. 直線 l,m を極線とする極を X,Y とするとき、直線 XY を極線とする極は l と m の交点 Z となる。

も同様に言えます。

さて、性質 $2,2'$ について、極線の交点を考えましたが、交わらない場合はどうしましょう。また O に対する極線や、O を通る直線に対する極を定義することはできないのでしょうか。ここでは射影平面を用いてこの問題を解消します。

いわゆるユークリッド平面 $\mathbb{R}$ では、異なる 2 本の直線は平行でない限り 1 点で交わります。平行なときも 1 点で交わるようにするため、**無限遠点**を $\mathbb{R}^2$ に付け加えます。無限遠点は原点を通る直線の方向を表したもので、2 本の直線が平行の時、同じ方向を向いているとして 1 点で交わるということにします。こうして、無限遠点をつけくわえた平面 $\mathbb{P}^2$ において、異なる 2 本の直線は 1 点で交わります。

一方、$\mathbb{P}^2$ は次のような代数的意味を持ちます。$\mathbb{P}^2$ 上の点を 3 数 X,Y,Z の比の形で $[X:Y:Z]$ と書き、(ただし、$(X,Y,Z)\neq(0,0,0)$ とする)$\mathbb{P}^2$ 上の (x,y) を $\left(\dfrac{X}{Z},\dfrac{Y}{Z}\right)$ と対応、無限遠点を $[X:Y:0]$ と対応させます。ここで、X,Y,Z の「比」の形なので、$[x:y:z]$ と $[x':y':z']$ を同一視します。このようにみた $[X,Y,Z]$ は、さっきの幾何的定義と一対一に対応することが分かります。

ここで、射影平面における直線を考えると、$\mathbb{P}^2$ 上では $ax+by+cz=0$ と書けたので、$a\cdot\dfrac{X}{Z}+b\cdot\dfrac{Y}{Z}+c=0$, つまり $aX+bY+cZ=0$ をみたす $\mathbb{P}^2$ 上の集合とすればよいと分かります。($Z=0$ のとき $aX+bY=0$ となり無限遠点も含まれていることに注意)

極 (α,β) に対応する極線は $\alpha x+\beta Y=Z$ に対応し、(α,β) は $[\alpha:\beta:1]$ に対応するので、$\mathbb{P}^2$ 上では極 $[x_0,y_0,z_0]$ と極線 $x_0X+y_0Y=z_0Z$ とを対応させれば、$\mathbb{R}^2$ 上での自然な対応となっています。

この対応を用いると、原点 O は $[0:0:1]$ なので、極 0 と $z=0$、つまり無限遠点全体が対応。一方、原点を通る直線 $ax+by=0$ を極線としたときの極 $[a:b:0]$、つまり $ax+by=0$ と垂直な方向の無限遠点と対応すると言えます。

こうして、射影平面 $\mathbb{P}^2$ について極と極線の対応がつきました。この対応についても性質 2. が保たれていることを見ておきましょう。

$X = [\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1],\ Y = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2],\ Z = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]$ とすると、Z は X,Y の極線上にあるので、

$$\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 = \gamma_1\gamma_3,\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 = \gamma_2\gamma_3$$

が成立します。すると Z に対応する極線 $\alpha_3 X + \beta_3 Y = \gamma_3 Z$ は X,Y を通ると言えるので、性質 2. は成り立つと言えます。

ここで、極と極線の対応の例として、パスカルの定理とブリアンションの定理の関係をみていきます。

まずはパスカルの定理。

定理 2.1 (パスカルの定理)**.** 円周上に点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ をとり、P_2 を A_2B_3 と A_3B_2 の交点 P_2 を A_3B_1 と A_1B_3 の交点、P_3 を A_1B_2 と A_2B_1 の交点とするとき、P_1 と P_2 と P_3 は共線。

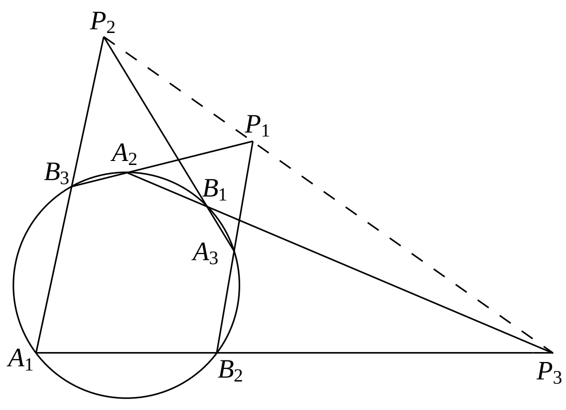

図 5

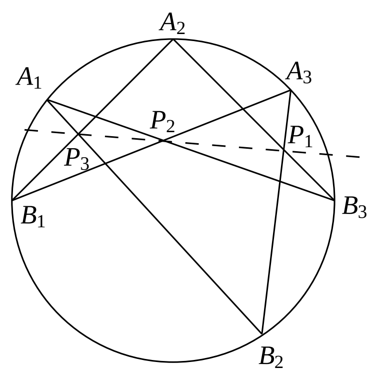

図 6

この定理は次のように初等的に示すことができます。

P_2 を通り A_3B_1 に平行な直線と A_2B_1 の交点を X、P_2 を通り A_3B_2 に平行な直線と A_1B_2 の交点を Y とします。

以下、角度には符号付き角度を用い、180° を法として合同とします。

このとき

$$\begin{aligned}\angle XP_1B_1 &\equiv \angle B_1A_3P_1\ (XP_1 \parallel A_3B_1\text{より})\\ &\equiv \angle XA_2B_2\ (A_1, A_2, B_1, P_2\text{は共円より})\end{aligned}$$

なので、X, P_1, A_2, B_2 は共円。同様に、

$$\begin{aligned}\angle YP_2B_1 &\equiv \angle B_2A_3B_1 \ (YP_2 \mathbin{/\!/} A_3B_2\text{より})\\ &\equiv \angle B_2A_1B_1 \ (A_1, A_3, B_1, B_2\text{は共円より})\end{aligned}$$

なので、Y, P_2, A_1, B_2 は共円。

すると、

$$\begin{aligned}\angle B_1YP_3 &\equiv \angle B_1P_2A_1 \ (\text{下の共円より})\\ &\equiv \angle A_3B_1A_1 - \angle P_2A_1B_1 \ (\text{外角を見る})\\ &\equiv \angle A_3B_2P_3 - \angle P_1A_2B_1 \ (A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\text{の共円より})\\ &\equiv \angle A_3B_2P_3 - \angle P_1B_2X \ (\text{上の共円より})\\ &\equiv \angle XB_2P_3\end{aligned}$$

となり、よって $B_1Y \mathbin{/\!/} XB_2$ と言えます。

$\triangle XP_1B_2$ と $\triangle B_1P_2Y$ は対応する 3 辺が平行なので、相似。その中心は P_3 なので、P_1, P_2, P_3 は共線です。

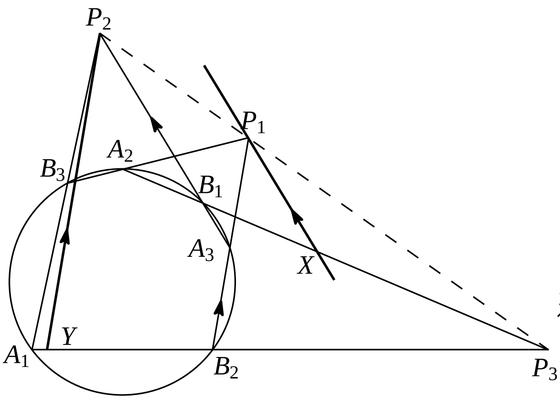

図 7

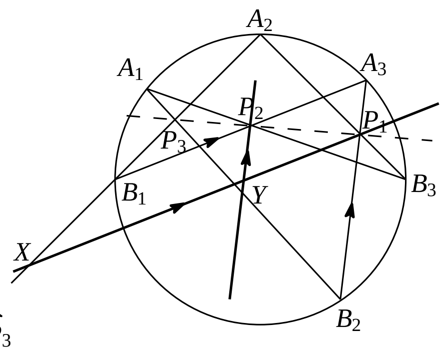

図 8

次にブリアンションの定理。

定理 2.2 (ブリアンションの定理)**.** *6* 角形 *ABCDEF* が円に外接するとき、*AD,BE,CF* は一点で交わる。

ここでは、この定理を極と極線の性質とパスカルの定理を使って示します。

AB,BC,CD,EF,FA の円の接点を P,Q,R,S,T,U とします。ここで、UP と RS の交点を X とすると、性質 1. より X を極とする極線は A も D も通るので、X の極線は AD といえます。同様に、PQ と ST の交点を Y、QR と TU の交点を Z とすると、Y の極線は BE、Z の極線は

CF となります。ここでパスカルの定理を適用すると、X,Y,Z は同一直線上にあります。性質 2. より、この直線を極線とする極を AD,BE,CF は通ると言えます。よって示せました。

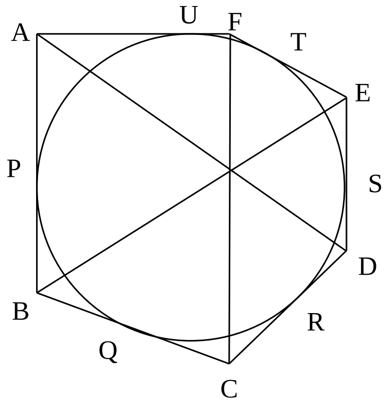

図 9

厳密には、交点が存在しない（2 直線と平行）の場合も考えないといけないですが、これは前にいった射影平面で同様の議論ができるのでよしとします。

さて、パスカルの定理とブリアンションの定理は**双対命題**と呼ばれています。これは円に対して、図に表れるすべての頂点をその極線に、すべての辺をその極に変えることでお互いの命題が変わるからです。

この例に限らず、直線（または線分）で構成された図形について、全ての頂点をその極線に、全ての辺をその極に変えることで新たな図形が得られますが、重要なのはまず、

- できた図形に同じ変換を加えるともとの図形に戻ること

であり、さらに、

- 「ある点がある直線にのっている」といういわゆる接続の関係が、変換を施した新たな図形についても（役割は入れ替わるが）変わらず残る

ということです。（性質 1,2 がそれを表している）これらの性質が双対性を生んでいます。

練習問題として、次を上げておきます。

問題. 三角形 ABC の内心を I、内接円と BC,CA,AB との接点を D,E,F とする。直線 l を、内接円に接し、かつ、EF,FD,DE のどれとも平行でないようにより、I を通り EF に平行な直線と l の交点を A'、I を通り FD と平行な直線と l の交点を B'、I を通り DE に平行な直線と l の交点を C' とするとき、AA', BB', CC' は一点で交わることを示せ。

3　一般次元での対称性

2 節では平面での双対性を考え、特にそこでは接続の関係が保たれていました。そこで、3 次元、4 次元、…と一般の次元でも同様の対称性が得られないか考えます。

一般の次元で考える前にひとまず 3 次元の場合を考えます。

3 次元空間で対象にすべきものは点、直線、平面です。ここで、2 次元で極と極線を考えたように、球 O と球の外部の点 X をとって、X から球へ引ける接線を全て引き、その接点が乗っている平面を考えると、これは「極面」と言えそうです。このように、3 次元における双対な変換では、点と平面を互いに移すようにするとよさそうです。さらに、2 次元のときと同様、極を (α,β,γ) とするとき、極面を $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ と定義すると自然と言えます。

このとき、例えば次の性質が成り立ちます。

性質 3. 点 X とそれを通る平面 m について、変換をし、平面 n と点 Y を得たとき、平面 n は Y を通る。

このことは、X,Y の座標を表し定義に当てはめることですぐに言えます。

問題は直線。それをどうするかですが、点、平面への変換はもうできないので、直線同士でで対応させることにします。

与えられた直線 l に対し、その直線と原点を通る平面を考え、その平面内で l を極線とする極を X とします。そして X を通り平面に垂直な直線 m を l と対応させます。

この対応と上の点と平面の対応をあわせて変換 f とするとき、f が次を満たすことを確認しましょう。

(i) l,m : 直線のとき、 $f(l)=m \Leftrightarrow f(m)=l$

(ii) l:直線、A : 点のとき、 $A\subset l \Leftrightarrow f(l)\subset f(A)$

まず、(i) ですが、$\Rightarrow$ を示せば十分です。$f(l)=m$ のとき、O から l にへ下ろした垂線の足を X' とすると、極線 OX は定義ででてきた X を通り、また $OX\cdot OX'=1$ となります。すると、m と O を通る平面 P は l と垂直といえ、$f(m)$ は X' を通り、かつ、P と垂直なので l と一致します。

(ii) について。

まず $\Rightarrow$ ですが、OA と $f(A)$ の交点を A' とし、O から $l,F(l)$ へ落とした垂線の足を X,X' と

します。$A = X'$ のときはよいので $A \neq X'$ のときについて。f の定義より $OA \cdot OA' = 1$ であり、また、A, A', X, X' は同一平面内にあるので、A, A', X, X' は共円。したがって $AA' \perp XA'$ となります。

さらに l と O を通る平面は $f(l)$ と垂直なので、$f(l) \perp XA'$ よって XA' と $f(l)$ を含む平面は OA と垂直といえるので、この平面が $f(A)$。したがって、$f(l) \subset f(A)$ です。

次に $\Leftarrow$ について。$f(f(A)) = A$ なので、平面 $p = f(A)$ としたとき、$A = f(p)$ となります。O から p へ下ろした垂線の足を A' とすると、$OA \cdot OA' = 1$。X, X' を上と同様にとると、$A = X'$ なら自明で、またそうでないときは A, A', X, X' を通る平面と l は垂直。したがって $AX \perp l$ よって A は l と O を通る平面と垂直なので $A \subset f(l)$ といえます。

上の 2 つの性質 (i)(ii) より、この変換は接続の関係を保つことが言えました。

これをもとに一般次元 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}\}$ で考えます。$\mathbb{R}^n$ 上で平面や直線に相等するのはフラットと呼ばれ、厳密には定義しませんが、ここでは「k-フラット」をある点から k 本の独立なベクトルが張るものを指すことにします。(例えば、平面、直線は 2-フラット、1-フラット) 特に、$n-1$-フラットを**超平面**と呼びます。これらの中で k-フラットを $(n-k-1)$-フラットに以下のように対応付けます。まず、$k = 0$ について。これは超平面と対応させることになりますが、$(a_1, a_2, \ldots a_n)$ を $a_1 x_1 P + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n = 1$ に対応させればよいです。$k = n-1$ のときはこれの逆をします。

$k \geq 1$ の場合。これはまず、k-フラット上で原点に一番近い点を X とし[*2]、また、半直線 OX 上に $OX \cdot OX' = 1$ なる点 X' をとります。X' を通り、もとの k-フラットと OX に垂直な $(n-k-1)$-フラット[*3]を対応させます。

こうすることで、(証明はしませんが) この変換を f とするとき、フラット A,B について $A \subset B \Rightarrow f(B) \subset f(A)$ が成立します。

最後に、接続を保つこの双対性の例として、$\mathbb{R}^3$ 上の多面体を挙げます。

立方体の中心を原点とし、各頂点を通るような球で、立方体に変換を行うと正八面体になります。逆に正八面体を変換すると立方体に戻り、同様に正十二面体と正二十面体、正四面体は自分同士と対応します。

一般に、多面体について、面の重心を頂点にし、面同士が辺を共有しているとき、それらの頂点を結ぶようにしてできる多面体を**双対多面体**といいます。この双対変換と、今まで考えて

[*2] 直線 OX が k-フラットと垂直であることに注意。k-フラットと垂直とは、これを張る独立な k 本のベクトルのどれとも垂直ということ。

[*3] ただし、$(k+1)$ 本のベクトルそれぞれに超平面が対応し、その交わりなので、X' を通り OX と $k-$ フラットに垂直な点全体が $(n-k-1)$-フラットとなることに注意しておきます。

きた変換は、変換先の形状が若干異なるのですが、正多面体の場合この変換は同じといえます。

さて、今考えている変換について、接続の仕方が変わらないことは述べました。そのことから次の事実が成り立ちます。

$$\begin{cases}\text{立方体の展開図の種類数と正八面体の展開図の種類数は同じ}\\ \text{正十二面体の展開図の種類数と正二十面体の展開図の種類数は同じ}\end{cases}$$

これは、展開図は辺の切り方で定まるものであって、片側のある展開図の切り方について、双対側ではもとの側で切ってあった辺は残し、もとの側で残してあった辺は切ります。そうすると、双対側の展開図が得られ、これによって展開図同士で一対一対応を作れます。

図 11 は、立方体の展開図と正八面体の展開図の対応を表しています。

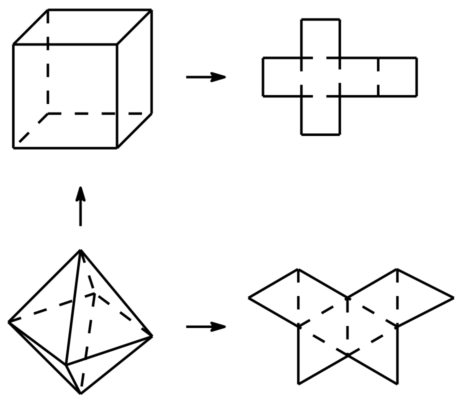

図 10

また、正十二面体と正二十面体の展開図は 43380 種ずつありますが、それらにももちろん双対な展開の対応があります。

4　あとがき

最後まで読んでいただいてありがとうございました。今年は好きな幾何について書いてみました。他の記事と比べると易しめですが、楽しく書けてよかったと思います。この記事で少しでも幾何について興味を持ってくださったら幸いです。

問題の答え

この命題はよく見るとシムソンの定理の双対命題になっています。

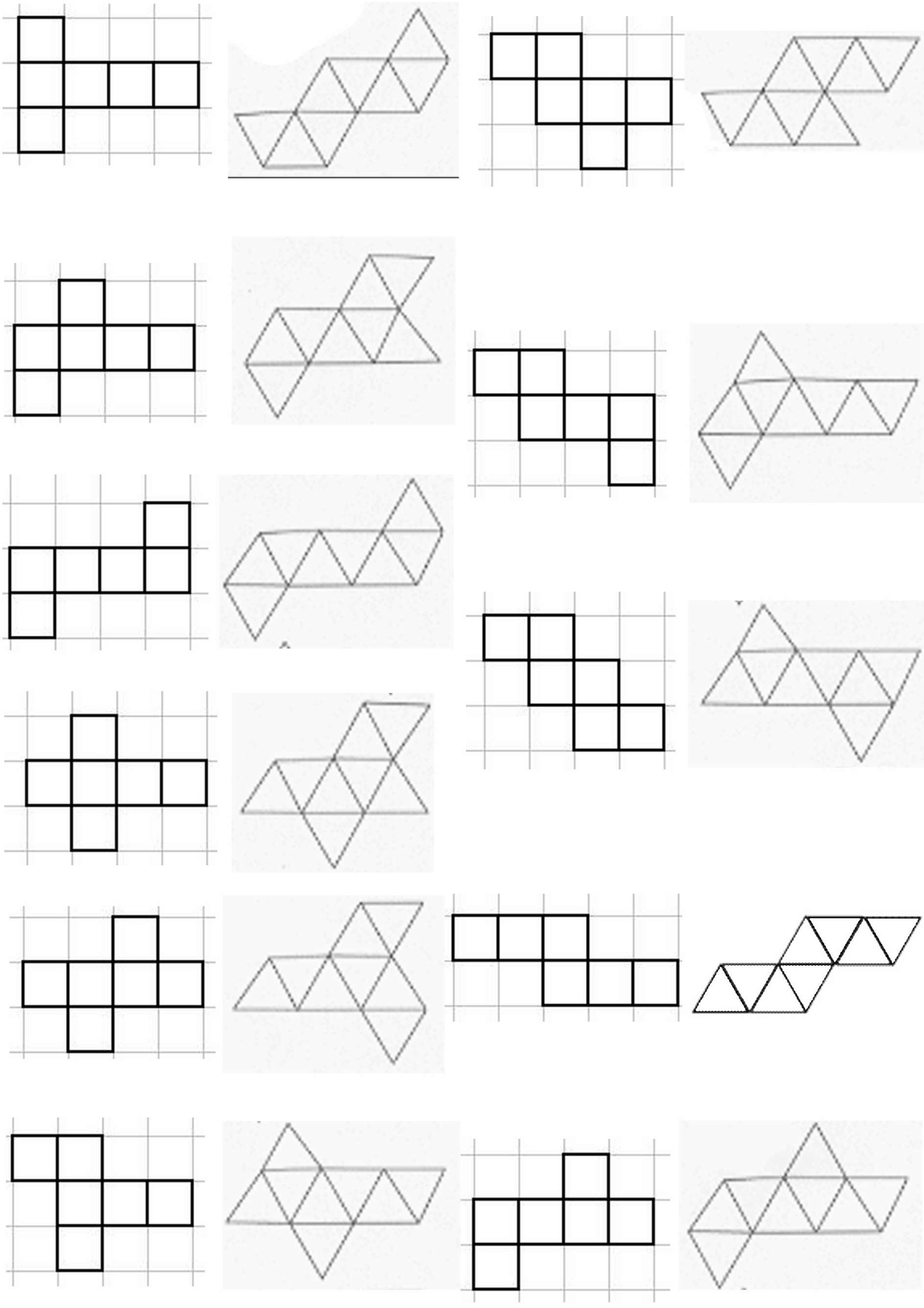

図 11