$\boxed{1}$ 最小の数を C としてよい。(A が最小のときは A を C,C を B,B を A で置き換えればいい。B が最小のときは B を C,A を B,C を A で置き換える)

$A+B+C$ を最小 (2704) にするのは $(A,B,C)=(2601,52,51)$ の組である事を示そう。

B を C で割った余りを B' とすると

$$0.01 \leqq \frac{B'}{C} < 0.02$$
$$50 \times B' < C \leqq 100 \times B'$$

$B' \geqq 1$ だから $C \geqq 51.$ すると $A,B \geqq 52$

$C \geqq 52$ ならば $B \geqq 53$

$A > C$ だから

$$0.01 \leqq \frac{C}{A} < 0.02$$
$$\therefore A \geqq 2601$$

したがって $C \geqq 52$ ならば $A+B+C \geqq 52+53+2601=2706>2704$ これは不適

よって $C=51$ のときだけを考えればいい。またそのときは

$$0.01 \leqq \frac{C}{A} = \frac{51}{A} < 0.02$$

より $A \geqq 2551$

また $0.01 \leqq \frac{B'}{C} = \frac{B'}{51} < 0.02$ を満たす B' は 1 のみ。よって B を 51 で割った余りは 1 だから,B は 52 または 103 または $154,\ldots,$ となる。

$B \geqq 103$ ならば $A+B+C \geqq 2551+103+51=2705>2704$ となり不適よって $B=52$

A を B で割った余りを A' とすると

$$0.01 \leqq \frac{A'}{52} < 0.02$$

よって $A'=1$,A を 52 で割った余りは 1。2551 以上の数でそうなる最小の数は 2601。

$$0.01 < \frac{C}{A} = \frac{51}{2601} < 0.02$$

なので $C \div A$ の小数第一、二位が「01」となります。

よって $(A,B,C)=(2601,52,51)$ の組が $A+B+C$ を最小にする。答えは $\underline{2704}$

コメント このように答えを予想してから場合分けをするというのは非常に有効なやり方です。正しい答えを予想するのは難しいことが多いですが。

$\boxed{2}$ 和 $\times\frac{175}{2}=$ 積

和, 積ともに自然数なので、和は偶数, 積は 175 の倍数

$175=5\times5\times7$ で、選んだ数は全て素数なので、5,5,7 の 3 つは必ず選ばれている

$5+5+7=17$ は奇数なので、残りの和は奇数

5 つ選んだとする

残りの 2 つの和が奇数なので、偶数 1 つ, 奇数 1 つ

偶数の素数は 2 のみ　奇数の方を ◯ とする

$(5+5+7+2+◯)\times87.5=5\times5\times7\times2\times◯$

$19+◯=4\times◯$

$◯=\frac{19}{3}$ で、不適

6 つ選んだとする

残りの 3 つの和が奇数なので、偶数 2 つ, 奇数 1 つまたは奇数 3 つ

(1) 偶数 2 つ, 奇数 1 つ

偶数の素数は 2 のみ　奇数を ◯ とする

$(5+5+7+2+2+◯)\times87.5=5\times5\times7\times2\times2\times◯$

$◯=3$ で、適する

(2) 奇数 3 つ

5 5 7 □□□	和	和 $\times87.5$	積
3 3 3	26	$2275<4725$	

7 つ選んだとする

5 5 7 □□□□	和	和 $\times87.5$	積
2 2 2 2	25	$2187.5<2800$	

選ぶ数を大きくすることと、選ぶ数の個数を増やすことによる積の増加は和の増加より大きいので、和 $\times87.5=$ 積となるのは 5,5,7,2,3 を選んだ時だけである

$5+5+7+2+2+3=24$　　　　　答 24

$\boxed{3}$ $ABCDE$ を 999 倍した数の各位の和は 9 の倍数。また、0.6 倍しても整数なので、5 の倍数でもある。よって、これは、45 の倍数。そして、この整数は、8 桁の数である事から、この数の各位の和は、45。
これより、$ABCDE$ を 9 倍、99 倍した数の各位の和は 27。
下のように、すべての場所で繰り下がりが起こっていないといけない。

$$\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & 0 & 0 & 0 \\ -) & & & A & B & C & D & E \\ \hline A & B & C-1 & D-A+9 & E-B+9 & 9-C & 9-D & 10-E \end{array}$$

このように、なる為には、

$$\begin{cases} E-1<B \\ D-1<A \end{cases}$$

になっていないといけない。
さて、99 倍した場合を考えよう。

$$\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & 0 & 0 \\ -) & & A & B & C & D & E \\ \hline & & (1) & (2) & (3) & 9-D & 10-E \end{array}$$

(1), (2), (3) のうち一ヶ所で繰り下がりが起こっているので、それぞれの場合を考える。

1. (3) のところで、繰り下がりが起こっている場合

$$\begin{cases} E-1<C \\ D-1 \geqq B \\ C \geqq A \end{cases}$$

   が成り立ち、$ABCDE=42531$ となって、9 倍したときに、各位の和が 27 にならないので、不適。

2. (2) のところで、繰り下がりが起こっている場合

$$\begin{cases} E-1 \geqq C \\ D<B \\ C-1 \geqq A \end{cases}$$

が成り立ち、$ABCDE = 25314$ となり、これは 9 倍して、各位の和が 27 になるので、これは良い。

3. (1) のところで、繰り下がりが起こっている場合

$$\begin{cases} E - 1 \geqq C \\ D \geqq B \\ C < A \end{cases}$$

が成り立ち、$ABCDE = 53142$ となって、9 倍したときに、各位の和が 27 にならないので、不適。

よって、答えは <u>25314</u>

$\boxed{4}$

10分後	A	B	C
	$?(g)$	$400(g)$	$100(g)$
	◯%	□%	◯%

操作後 (B から A への)	A	B	C
	$\begin{pmatrix} ?(g) \\ \bigcirc\% \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{400}{3}(g) \\ \square\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{800}{3}(g) \\ \square\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100(g) \\ \bigcirc\% \end{pmatrix}$

ここから A を蒸発させせますが、A を　?(g)◯% の食塩水に $\frac{400}{3}$(g)□% の食塩水を蒸発させたものを加えたと考えます。15 分後に A と C の濃さが等しくなった, つまり濃さが ◯% になったので、$\frac{400}{3}$(g)□% の食塩水を 15 分蒸発させせると濃さが ◯% となると言うことになります。

さて、Bに A の食塩水の 3 分の 1 を加え、何分か (△ 分とします) 蒸発させせると全ての食塩水の濃さが等しくなったとありますが、A と C の濃さは B を蒸発させる前からともに ◯% ですから,

A の食塩水の 3 分の 1(濃さ ◯%)+$\frac{800}{3}$(g)□% を △ 分蒸発させせた食塩水の濃さが ◯% になる。

従って $\frac{800}{3}$(g)□% の食塩水を △ 分蒸発させせると濃さが ◯% になります。

$\frac{400}{3}$(g)□% の食塩水を 10 分蒸発させせると濃さが ◯% になりますから　$\triangle = \underline{30}$

$\boxed{5}$ 一番上の数が ◯(1〜6) のとき、1 回操作すると、上から ◯ 番目の数が ◯ になる。

（例）

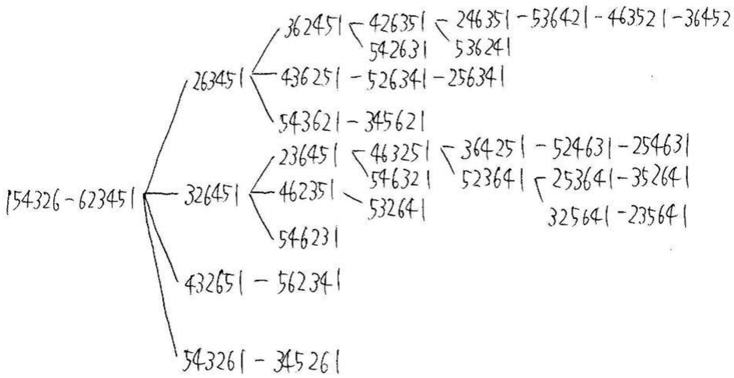
$5, 4, 2, 3, 1, 6$　一番上が 5

$\downarrow$

$1, 3, 2, 4, 5, 6$　5 番目が 5

これに注意して逆からたどっていく。

この樹形図に現れるカードの積み方は全部で 35 通り　　<u>答 35 通り</u>



$\boxed{6}$ ある点が O から右に ◯(cm) 上に □(cm) の位置にあるときその点の位置が (◯, □) である。または、その点が (◯, □) であると書きます。また、左、下にあるときはそれぞれマイナスをつけます

ex. 1 番目の点:$(0, -1)$,2 番目の点:$(-1, -1)$,3 番目の点:$(0, -1)$,4 番目の点:$(0, -2)$,14 番目の点:$(1, 3)$

さて図 1 のように (△, ▽) の位置にある点を中心として回転すると、(△ + □, ▽ − ◯) の位置にある点は (△ + ◯, ▽ + □) の位置に動きます。

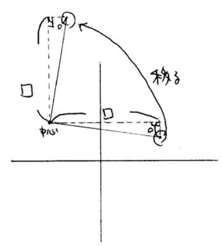


図 1:

よって 4 番目の点は 2 番目の点を中心として O が移った点なので $(-2, 0)$ の位置にあります。

同様に 8 番目の点は 4 番目の点を中心として O が移った点なので $(-2, 2)$

16 番目の点は 8 番目の点を中心として O が移った点なので $(0, 4)$

32 番目の点は 16 番目の点を中心として O が移った点なので $(4, 4)$

64 番目の点は 32 番目の点を中心として O が移った点なので $(8, 0)$

128 番目の点は 64 番目の点を中心として O が移った点なので $(8, -8)$

256 番目の点は 128 番目の点を中心として O が移った点なので $(0, 16)$

512 番目の点は 256 番目の点を中心として O が移った点なので $(-16,-16)$

1024 番目の点は 512 番目の点を中心として O が移った点なので $(-32,0)$

2048 番目の点は 1024 番目の点を中心として O が移った点なので $(-32,32)$

さて、3000 番目の点は 2048 番目の点を中心として $2048-(3000-2048)=1096$ 番目の点が移った点.

1096 番目の点は 1024 番目の点を中心として $1024-(1096-1024)=952$ 番目の点が移った点,

952 番目の点は 512 番目の点を中心として 72 番目の点が移った点,

72 番目の点は 64 番目の点を中心として 56 番目の点が移った点,

56 番目の点は 32 番目の点を中心として 8 番目の点が移った点となります。

よって 56 番目の点:$(6,-2)$,72 番目の点:$(10,-6)$,952 番目の点:$(-26,10)$,1096 番目の点:$(-42,6)$,3000 番目の点:$(16,22)$ です。

よって答えは <u>22cm</u>

$\boxed{7}$ P,Q,R の値段に消費税を加えた (1.05 倍した) ものの小数部分を ◯,□,△ とする。(1.05 倍して整数の時は **1** とする)

3 月と 4 月で差が出るのは、◯,□,△ の部分の処理の違いによる。

P を 53 個,Q を 73 個,R を 93 個買ったとき、◯,□,△ の部分の値段は

3 月：$(53\times\bigcirc+73\times\square+93\times\triangle)$ の切り捨て

4 月：$53+73+93=219$（◯,□,△ を切り上げると 1 だから）

4 月は 3 月より 170 円高いので

$(53\times\bigcirc+73\times\square+93\times\triangle)$ の切り捨ては 49

よって、

$$49\leqq 53\times\bigcirc+73\times\square+93\times\triangle<50 \tag{1}$$

同様にして、

$$39\leqq 43\times\bigcirc+60\times\square+77\times\triangle<40 \tag{2}$$

$$(1)\times 43 \qquad 2107\leqq 53\times 43\times\bigcirc+3139\times\square+3999\times\triangle \tag{3}$$

$$(2)\times 53 \qquad 43\times 53\times\bigcirc+3180\times\square+4081\times\triangle<2120 \tag{4}$$

$$(4)-(3) \qquad 41\times\square+82\times\triangle<13 \tag{5}$$

ここで、◯,□,△ は整数を $\frac{21}{20}$ 倍したものの小数部分なので、$\frac{1}{20},\frac{2}{20}\cdots\frac{20}{20}$ のどれか

$(5)\times\frac{20}{41} \qquad 20\times\square+2\times(20\times\triangle)<\frac{260}{41}$

$20\times\square, 20\times\triangle$ は整数なので

$20\times\square+2\times(20\times\triangle)\leqq 6$

4	1
2	2
3	1
1	2
2	1
1	1

上の 6 通りを全て調べると、$\bigcirc=\frac{14}{20}, \square=\frac{2}{20}, \triangle=\frac{1}{20}$ で (1) が成り立つ

このとき (2) も成り立つので、$\bigcirc=\frac{14}{20}, \square=\frac{2}{20}, \triangle=\frac{1}{20}$

P を 93 個,Q を 31 個,R を 68 個買ったとき

3 月：$93\times\frac{14}{20}+31\times\frac{2}{20}+68\times\frac{1}{20}=71.6$　切り捨てると 71

4 月：$93+31+68=192$　なので

$192-71=121$(円) 高くなった　　　答 121

$\boxed{8}$ 1 秒後に、この操作をすることで、◯の中の数すべての和は、◇の中の数すべての和になる。

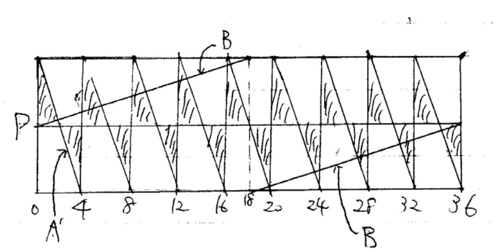
そして、ココから先は、◇の中の数のすべての和が◯の中の数すべての和になることと、

◯の中の数すべての和は、◇の中の数すべての和になることの繰り返しである。

1 秒後に、◯の中の数すべての和、◇の中の数すべての和はともに 72 になるので、求める答えは、144　となる。

$\boxed{9}$

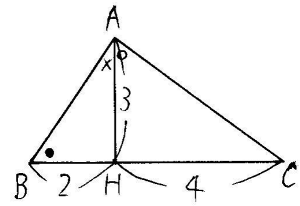
壁がとまっているものとして考える。このとき、B は反時計回りに毎分 20m、つまり毎分 10 度で動き、A は時計回りに毎分 160m、つまり毎分 80 度で動いていると考える。ここで、A と中心をはさんで常に反対側に居る人を作り、その人を A' とする。A' と B の動きを表すダイヤグラムを描く。図の斜線部分は A' と P の間の部分（A' と P が近い方）を表している。この斜線部分に B がいるとき、A から B は見えない。

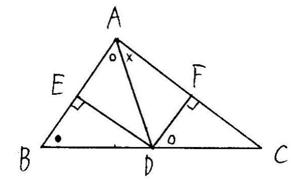


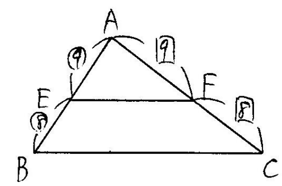
これより、求める答えは 44.5 分。

$\boxed{10}$

$\triangle$AHC,$\triangle$AED,$\triangle$DFC について
$\angle$HAC$=\angle$EAD$=\angle$FDC$=\bigcirc$
$\angle$AHC$=\angle$AED$=\angle$DFC$=90^\circ$
よって、$\triangle$AHC$\sim\triangle$AED$\sim\triangle$DFC（$\sim$ は相似であることを表す）
だから、AE:ED=AH:HC$=3:4\ldots$ (1)
CF: FD $=$ CH :HA$=4:3\ldots$ (2)







$\triangle$AHB と $\triangle$DEB について
$\angle$ABH$=\angle$DBE$=\bullet$
$\angle$AHB$=\angle$DEB$=90^\circ$
よって、$\triangle$AHB$\sim\triangle$DEB
だから、BE:ED=BH:HA$=2:3\cdots$ (3)
$\triangle$AHB と $\triangle$AFD について
$\angle$BAH$=\angle$BAC$-\angle$HAC
$=\angle$BAC$-\bigcirc$
$=\angle$BAC$-\angle$EAD$=\angle$DAF
$\angle$AHB$=\angle$AFD$=90^\circ$
よって、$\triangle$AHB$\sim\triangle$AFD
だから、AF:FD=AH:HB$=3:2\cdots$ (4)
(1),(3) より、AE:ED:BE$=9:12:8$
(2),(4) より、AF:FD:CF$=9:6:8$
AE:BE=AF:CF$=9:8$ より、EF$=\frac{9}{9+8}\times$BC$=\frac{54}{17}$　答 $\underline{\frac{54}{17}}$

$\boxed{11}$

図 2 で、PS:SQ$=1:2$,RT:TQ$=1:3$ より、
$\angle$PQS$=\bigcirc$,$\angle$RQT$=\times$
また、$\triangle$PQR は直角二等辺三角形なので、
$\angle$PQR$=45^\circ$
よって、$\bigcirc+\times=45^\circ$
$\triangle$DBE,$\triangle$DCE を図 3 のように折り返す。
BE と CH の交点を F とすると、
$\angle$BFC$=180^\circ-\bigcirc\bigcirc-\times\times$
$=180^\circ-2\times(\bigcirc+\times)=90^\circ$
よって、四角形 FGDH は正方形
BF=BG+GF=BG+DH$=2+1=3$
CF=CH+HF=CH+DG$=3+1=4$

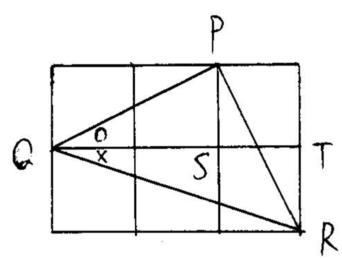


図 2:

つまり、△FBC は辺の比が $3:4:5$ の直角三角形

I,J から BC に下ろした垂線の足をそれぞれ K,L とし、
D から IK,JL に下ろした垂線の足をそれぞれ M,N とする。
DI//CF,MD//BC より、△MID は △FBC と相似で、辺の比が $3:4:5$ の直角三角形
DJ//BF,DN//BC より、△NDJ は △FBC と相似で、辺の比が $3:4:5$ の直角三角形
よって、IM$=1.2$,MD$=1.6$
JN$=1.6$,ND$=1.2$
だから、
BK=BE−KE=BE−MD$=2-1.6=0.4$
IK=IM+MK=IM+DE$=1.2+1=2.2$
CL=CE−LE=CE−ND$=3-1.2=1.8$
JL=JN+NL=JN+DE$=1.6+1=2.6$

図 5 において、BO:AO=BK:IK$=0.4:2.2=2:11$
CO:AO=CL:JL$=1.8:2.6=9:13$
よって、BO:CO:AO$=26:99:143$
したがって、AO$=\frac{143}{26+99}\times$BC$=\frac{143}{125}\times 5=\frac{143}{25}$
だから、△ABC$=\frac{1}{2}\times$BC$\times$AO$=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{143}{25}=14.3$
<u>答 14.3</u>

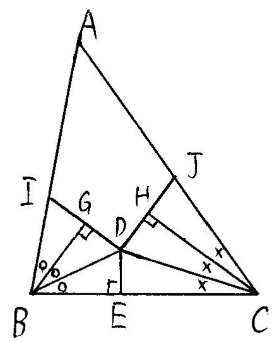


図 3:

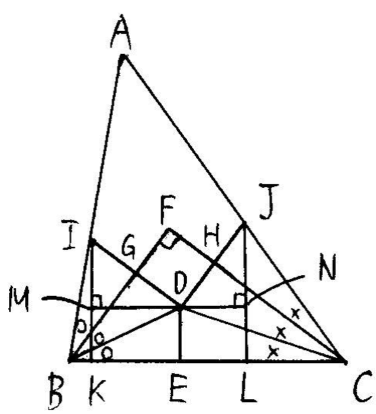


図 4:

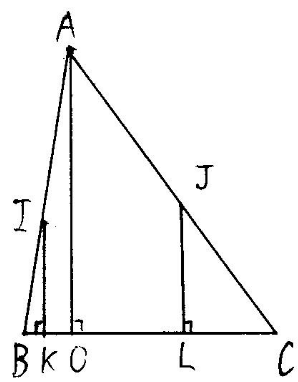


図 5:

$\boxed{12}$

図 6 のように点 A から辺 CD に垂線を引きます。その垂線と辺 CD との交点を点 E とします。

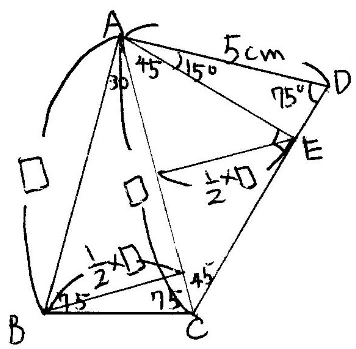


図 6:

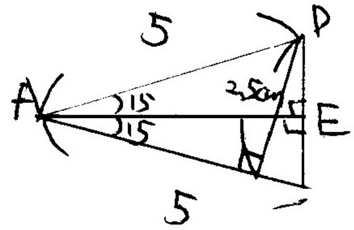


図 7:

辺 AC の長さを □ とすると, AC=AB=□, ∠BAC=30° ですから、三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \times \square \times \frac{\square}{2} = \frac{\square^2}{4}$

また三角形 ACE は斜辺の長さが □ である直角二等辺三角形ですから面積は $\frac{\square^2}{4}$ です。

よって三角形 ABC と三角形 ACD の面積の差は三角形 ADE の面積に等しくなります。図 7 のような三角形 ADE に三角形 ADE と合同な三角形を付け加えた三角形を考えれば

$$\text{三角形 } ABC \text{ と三角形 } ACD \text{ の面積の差} = \text{三角形 } ADE \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 2.5 = 3\frac{1}{8}(\mathrm{cm}^2)$$

となります

$\boxed{13}$ C を通り、AB に平行な直線と AD の延長との交点を E とする。
すると、$\angle AEC = \angle BAD = 20$ °。これより、$\angle ACE = 180$ °$- 80$ °$- 20$ °$= 80$ °となり、
三角形 AEC は $AE = CE$ の二等辺三角形。三角形 ABD と三角形 ECD が相似なので、

$$CE = AE = AD + DE = 20 + 20 \times \frac{8}{5} = 52$$

$$AB = \frac{5}{8} \times CE = \frac{65}{2}$$

答えは、$\underline{\frac{65}{2}\mathrm{cm}}$

$\boxed{14}$

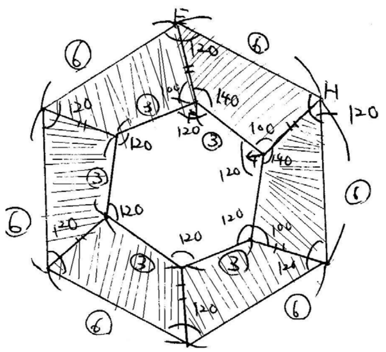


図 8:

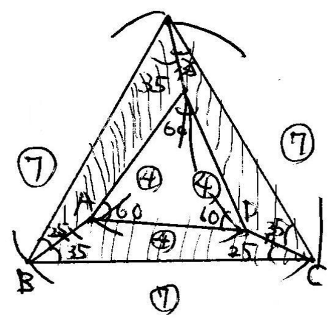


図 9:

図 8 と図 9 のように四角形 ABCD, 四角形 EFGH に何個か合同な四角形を張り合わせるとそれぞれ、正三角形から正三角形がくりぬかれた図形と、正六角形から正六角形がくりぬかれた図形になります。

AD= 4 × ◯ とし、一辺 ◯ の正三角形の面積を □ とすると

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \frac{1}{3} \times (\text{一辺 } 7 \times \bigcirc \text{の正三角形} - \text{一辺 } 4 \times \bigcirc \text{の正三角形}) \\ &= \frac{1}{3} \times (49 \times \square - 16 \times \square) = 11 \times \square \\ \text{四角形 } EFGH &= \frac{1}{6} \times (\text{一辺 } 6 \times \bigcirc \text{の正六角形} - \text{一辺 } 3 \times \bigcirc \text{の正六角形}) \\ &= \frac{1}{6} \times (6 \times 36 \times \square - 6 \times 9 \times \square) = 27 \times \square \end{aligned}$$

よって答えは $\underline{11:27}$

$\boxed{15}$ まず、直角二等辺三角形ひとつの面積は、八角形と直角二等辺三角形四つを合わせた図形の $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$ となるので、この面積は、$1cm^2$。
よって、この直角二等辺三角形の斜辺の長さは 2cm
この展開図を組み立てると、図 11 のようになる。そして、これは図 12 の立体を 4 つ組み合わせたものになっている。
図 12 の立体は、一辺が 2cm の立方体を断面が正六角形となるようにちょうど半分に切ったものである。
よって、この体積は、$\frac{2^3}{2} = 4cm^3$ である。
これより、求める体積は、$4 \times 4 = \underline{16cm^3}$

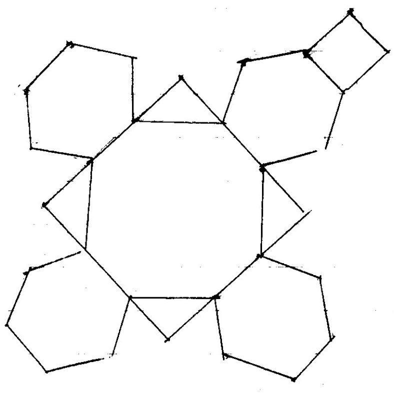


図 10:

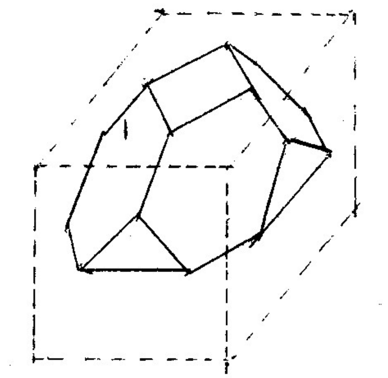


図 11:

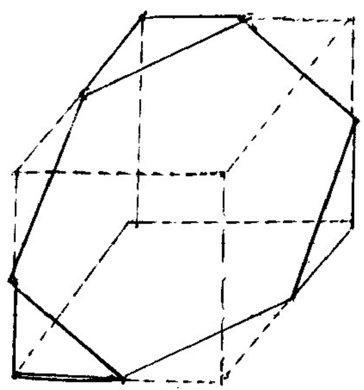


図 12: