2005年度灘中入試模試解説

$\boxed{1}$

例えば、60 以下の自然数のうち 60 と互いに素であるものの個数を求める時、$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ より、1〜60 のうち 2 の倍数と 3 の倍数と 5 の倍数を除いて、$60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16$ 個とすればよい。
この式において、分母の $2, 3, 5$ は 60 の異なる素因数なので、分母の積 $2 \times 3 \times 5$ は、60 を割り切る。よって、分子の積 $1 \times 2 \times 4$ は 16 の約数である。
これは、一般の場合でも成り立つ。
では問題の解説に移る。
条件より、自然数 A について上の例のような式を作ると、分子の積が 24 の約数になる。
分子の積で場合分けして、分子の組み合わせを書き出す。
1 足して素数にならないものが含まれている組は不適。

(a) 分子の積が 24 の時
$(24) \to$ 不適
$(1, 24) \to$ 不適
$(2, 12) \to A \times \frac{2}{3} \times \frac{12}{13} = 24 \quad A = 39$
$(3, 8) \to$ 不適
$(4, 6) \to A \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = 24 \quad A = 35$
$(1, 2, 12) \to A \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{12}{13} = 24 \quad A = 78$
$(1, 3, 8) \to$ 不適
$(1, 4, 6) \to A \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = 24 \quad A = 70$
$(2, 3, 4) \to$ 不適
$(1, 2, 3, 4) \to$ 不適

$(b)12$ の時
A を分母の積で割ったものが 2 なので、A は素因数 2 を持つ。すなわち、分子に 1 がある。
$(12) \to$ 不適
$(1,12) \to A \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{12}{13} = 24 \quad A = 52$
$(2,6) \to$ 不適
$(3,4) \to$ 不適
$(1,2,6) \to A \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times 67 = 24 \quad A = 84$
$(1,3,4) \to$ 不適

$(c)8$ の時
A を分母の積で割ったものが 3 なので、A は素因数 3 を持つ。すなわち、分子に 2 がある。
$(8) \to$ 不適
$(1,8) \to$ 不適
$(2,4) \to A \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = 24 \quad A = 45$
$(1,2,4) \to A \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = 24 \quad A = 90$

$(d)6$ の時
A を分母の積で割ったものが $4 = 2^2$ なので、A は素因数 2 を持つ。すなわち、分子に 1 がある。
$(6) \to$ 不適
$(1,6) \to A \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{7} = 24 \quad A = 56$
$(2,3) \to$ 不適
$(1,2,3) \to$ 不適

$(e)4$ の時
A を分母の積で割ったものが $6 = 2 \times 3$ なので、A は素因数 $2, 3$ を持つ。すなわち、分子に $1, 2$ がある。
$(4) \to$ 不適
$(1, 4) \to$ 不適

$(f)3$ の時
A を分母の積で割ったものが $8 = 2^3$ なので、A は素因数 2 を持つ。すなわち、分子に 1 がある。
$(3) \to$ 不適
$(1, 3) \to$ 不適

$(g)2$ の時
A を分母の積で割ったものが $12 = 2^2 \times 3$ なので、A は素因数 $2, 3$ を持つ。すなわち、分子に $1, 2$ がある。
$(2) \to$ 不適
$(1, 2) \to A \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = 24 \quad A = 72$

$(h)1$ の時
A を分母の積で割ったものが $24 = 2^3 \times 3$ なので、A は素因数 $2, 3$ を持つ。すなわち、分子に $1, 2$ がある。
$(1) \to$ 不適

以上より、A として考えられるものは、$39, 35, 78, 70, 52, 84, 45, 90, 56, 72$ である。
よって求める総和は 621

答 $\underline{621}$

$\boxed{2}$
答えは、$A=89$、$B=55$。
このとき、

$$
\begin{aligned}
89 \div 55 &= 1 \cdots 34 \\
55 \div 34 &= 1 \cdots 21 \\
34 \div 21 &= 1 \cdots 13 \\
21 \div 13 &= 1 \cdots 8 \\
13 \div 8 &= 1 \cdots 5 \\
8 \div 5 &= 1 \cdots 3 \\
5 \div 3 &= 1 \cdots 2 \\
3 \div 2 &= 1 \cdots 1 \\
2 \div 1 &= 2 \cdots 0
\end{aligned}
$$

となり、9 回で終了する。
この時、商の値が全て最小 (8 回目まで 1、9 回目は 1 になりえない [1]ので 2) なので、
下から上に式を見ていった時に、A、B の値がなるべく大きくならないようになっている。

[1] 1 だとすると、8 回目の割り算が $B \div A = C \cdots A$ となる。

(例)

$$
\begin{array}{lcll}
\vdots & & & \qquad\qquad \vdots \\
\div & = & 1(\cdots\quad) & \qquad 13 \div 8 = 1(\cdots 5) \\
\div & = & 1(\cdots\quad) & \qquad 8 \div 5 = 1(\cdots 3) \\
\div & = & 1(\cdots\quad) \longrightarrow & \qquad 5 \div 3 = 1(\cdots 2) \\
\div & = & 1(\cdots\quad) & \qquad 3 \div 2 = 1(\cdots 1) \\
\div 1 & = & 2(\cdots 0) & \qquad 2 \div 1 = 2(\cdots 0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
\div & = & 1(\cdots\quad) & \qquad 13\text{より大} \div 8\text{より大} = 1(\cdots 5\text{より大}) \\
\div & = & 1(\cdots\quad) & \qquad 8\text{より大} \div 5\text{より大} = 1(\cdots 3\text{より大}) \\
\div & = & \cancel{1}2(\cdots\quad) \longrightarrow & \qquad 5\text{より大} \div 3 = \cancel{1}2(\cdots 2) \\
\div & = & 1(\cdots\quad) & \qquad 3 \div 2 = 1(\cdots 1) \\
\div 1 & = & 2(\cdots 0) & \qquad 2 \div 1 = 2(\cdots 0)
\end{array}
$$

このように、商の値が、最小である $(1,1,1,\cdots,1,2)$ の形でないと、
9 回操作をたどると、$A > 89$、$B \geqq 55$ となってしまう。
しかし、$A = 90$、$B = \square$ という答えがあるかもしれない。
これが無いことを確かめておく。

最初に見たように、商の値が最小である $(1,1,\cdots,1,2)$ のとき「最初の 1 の操作が終わった後の A」の値が 34 なので、商の値がどうであっても「最初の 1 の操作が終わった後の A」の値は 34 以上。
よって、$A = 90$ のとき、B は 56 以下。
また、B は 55 以上なので、あとは 2 通り試してみるだけである。

$A=90$、$B=55$ のとき：

$$
\begin{aligned}
90 \div 55 &= 1 \cdots 35 \\
55 \div 35 &= 1 \cdots 20 \\
35 \div 20 &= 1 \cdots 15 \\
20 \div 15 &= 1 \cdots 5 \\
15 \div 5 &= 3 \cdots 0
\end{aligned}
$$

5 回なので答えにふさわしくない。
$A=90$、$B=56$ のとき：

$$
\begin{aligned}
90 \div 56 &= 1 \cdots 34 \\
56 \div 34 &= 1 \cdots 22 \\
34 \div 22 &= 1 \cdots 12 \\
22 \div 12 &= 1 \cdots 10 \\
12 \div 10 &= 1 \cdots 2 \\
10 \div 2 &= 5 \cdots 0
\end{aligned}
$$

6 回なので答えにふさわしくない。
よって答えは最初の $A=89$、$B=55$ のみ。

答 $\underline{A=89\ B=55}$

$\boxed{3}$

次の表は、左の数を1回、2回、とかけていった時の一の位を右に書いたものである。書いてあるところまでが周期になっていて、これ以降は同じ周期で繰り返す。

0	0			
1	1			
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6		
5	5			
6	6			
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1		

A を B 回かけた数と B を C 回かけた数と C を A 回かけた数の3数の一の位で場合分けする。

(a)3数の一の位が0の時

A, B, C は $10, 20, 30, 40, 50$ の並び替えなので $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り

(b)1の時

A, B, C の一の位は $1, 3, 7, 9$ のどれかだが、例えば A の一の位が $3, 7, 9$ のどれかであるとすると、B は偶数となり、矛盾するので、A の一の位は1である。B, C に関しても同様である。

よって、A, B, C は $1, 11, 21, 31, 41$ の並び替えなので $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り

(c)2の時

A, B, C の一の位は $2, 8$ のどちらかだが、例えば A の一の位が $2, 8$ のどちらであるとしても、B は奇数となり、矛盾する。

よって、3数の一の位が2になることはない。

(d)3の時

A, B, C の一の位は $3, 7$ のどちらか。一の位が $3, 7$ のどちらであるかと、4で割った余りが $1, 3$ のどちらであるかでグループ分けすると、

$\{3, 23, 43\}, \{13, 33\}, \{7, 27, 47\}, \{17, 37\}$ となる。同じグループの数は同一視できるので、それぞれのグループから $3, 13, 7, 17$ を代表として選んで考える。

A	B	C	
3	13	17	$3 \times 2 \times 2 = 12$ 通り
3	17	7	$3 \times 2 \times 3 = 18$ 通り
13	13	13	$\times$
13	17	3	12
7	3	17	18
7	7	7	6
17	3	13	12
17	7	3	18

よって、これらを合計して 96 通り

$(e)4$ の時

A, B, C の一の位は $2, 4, 8$ のどれかだが、例えば A の一の位が 4 だとすると、B は奇数となり矛盾する。

よって、A, B, C は一の位が 2 か 8 で、4 で割った余りは 2 である。

したがって、A, B, C は $2, 22, 42, 18, 38$ の並び替えなので、

$5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り

$(f)5$ の時

A, B, C は $5, 15, 25, 35, 45$ の並び替えなので、$5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り

$(g)6$ の時

A, B, C の一の位は $2, 4, 6, 8$ のどれか。一の位と 4 で割った余りで次のようにグループ分けできる。

$\{2, 22, 42, 18, 38\}, \{12, 32, 8, 28, 48\}, \{4, 24, 44, 16, 36\}, \{14, 34, 6, 26, 46\}$

となる。(d) の時と同様に、それぞれのグループから $2, 8, 4, 6$ を代表として選んで考える。

A	B	C	
2	4	4	$5 \times 5 \times 4 = 100$ 通り
2	4	6	$5 \times 5 \times 5 = 125$ 通り
2	8	4	125
4	2	4	100
4	2	8	125
4	4	2	100
4	4	4	60
4	4	6	100
4	4	8	100
4	6	2	125
4	6	4	100
4	6	6	100
4	6	8	125
4	8	4	100
4	8	8	100
6	2	4	125
6	4	4	100
6	4	6	100
6	6	4	100
6	6	6	60
6	8	4	125
8	4	2	125
8	4	4	100
8	4	6	125
8	4	8	100
8	8	4	100
8	8	8	60

よって、これらを合計して 2805 通り

(h)7 の時

3 の時と同様で、96 通り

(i)8 の時

2 の時と同様で、3 数の一の位が 8 となることはない。

$(j)9$ の時
A, B, C の一の位は $3, 7, 9$ のどれかだが、例えば A の一の位が $3, 7$ のどちらかであるとすると、B は偶数となり矛盾するので、A の一の位は 9 である。B, C に関しても同様である。
よって、A, B, C は $9, 19, 29, 39, 49$ の並び替えなので、$5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り

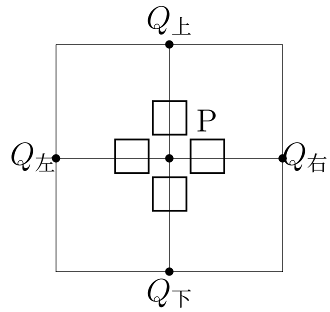
以上を合計して、$60 \times 5 + 96 \times 2 + 2805 = 3297$ 通り

答 $\underline{3297\text{ 通り}}$

$\boxed{4}$
毎分 $10l$ で A が 15 分で、B が 17 分でいっぱいになるので
A の体積は $10 \times 15 = 150l$
B の体積は $10 \times 17 = 170l$
穴を開いたとき毎分 $20l$ で水を入れると、A と B がともにいっぱいになるのに $(150 + 170) \div 20 = 16$ 分かかる。
A がいっぱいになってから B がいっぱいになるまで 6 分かかるので、A がいっぱいになるには 10 分かかる。
A には毎分 $150 \div 10 = 15l$ で入っていることになるので、穴からは毎分 $5l$ もれていると分かる。
よって穴を開いて毎分 $10l$ で水を入れると A には毎分 $5l$ で水が入ることになるので、A がいっぱいになるには $150 \div 5 = 30$ 分かかる。

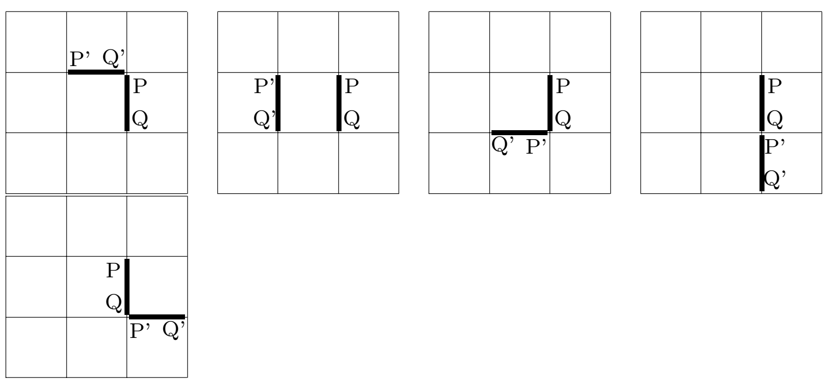
答 $\underline{30\text{分後}}$

$\boxed{5}$

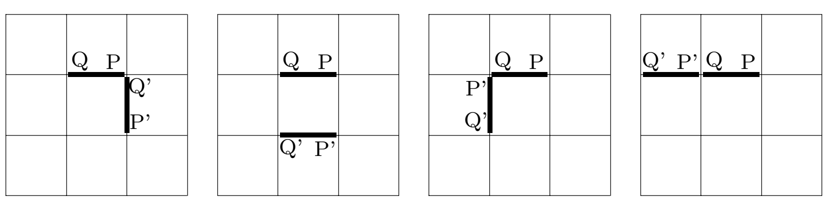


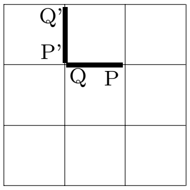
図のように、あるところに P があるとする。そのとき、
Q が上にあるような状態までの PQ の動かし方を P の上に
Q が左にあるような状態までの PQ の動かし方を P の左に
Q が下にあるような状態までの PQ の動かし方を P の下に
Q が右にあるような状態までの PQ の動かし方を P の右に
書くことにする。
P が最短距離で左下の A から右上の B まで動くことから P は右もしくは上にのみ動くので、P を $1cm$ 動かすときの線分 PQ の動かし方は次の 16 通りある。ただし、動かす前の P, Q を P', Q' と書き、動かした後を P, Q と書いている。

(i) 動かした後 Q が P の下にあるような動かし方 (5 通り)

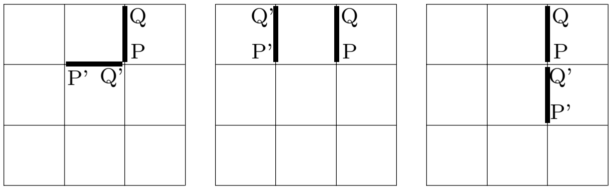


(ii) 動かした後 Q が P の左にあるような動かし方 (5 通り)

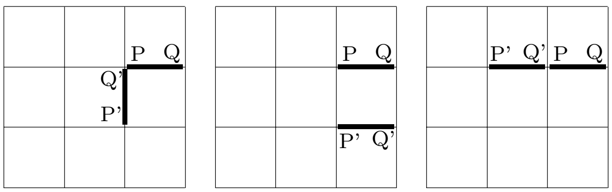




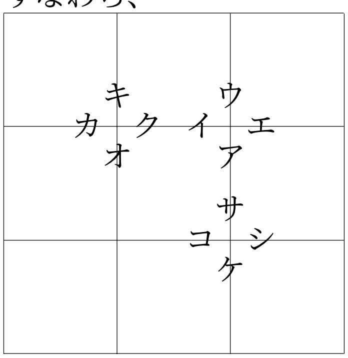
(iii) 動かした後 Q が P の上にあるような動かし方 (3 通り)



(iv) 動かした後 Q が P の右にあるような動かし方 (3 通り)

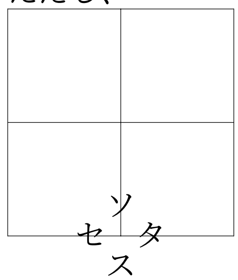


すなわち、

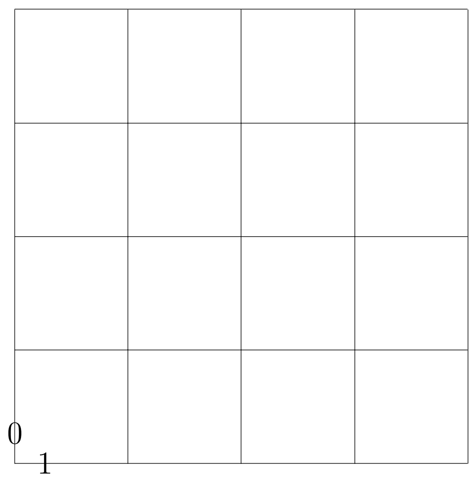


のようにしたとき、オ、カ、キ、ク、ケ、コ、サ、シが定まれば
ア、イ、ウ、エも次のように決定することができる。
アにはオ、ク、コ、ケ、シ
イにはサ、コ、オ、カ、キ
ウにはク、キ、サ
エにはサ、シ、ク
の和を書き込めばよい。

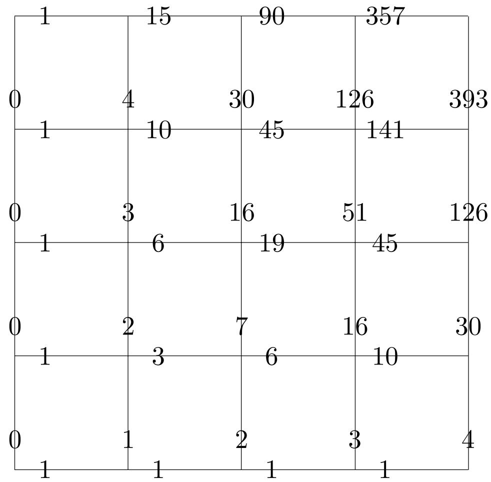
ただし、



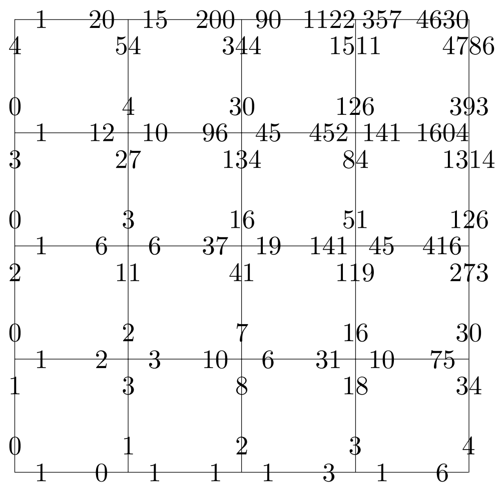
のような場合は、Q が枠からはみ出ることはないのでスは 0 と考えられる。他の隅においても同様である。
この様な規則にしたがって、格子に数字を記入していく。
以後、枠からはみでた箇所の数字は省略し、全て 0 であるとする。
まず、最初 Q が P の右にあることから、



と書く。
次に、各格子点の上と右に、左下の格子点から順に数字を書き込んでいくと



となる。
最後に、この結果を用いて各格子点の下と左に、左下の格子点から順に書き込んでいくと



となる。
求めるのは最も右上に P があるときまでの動かし方の数だから、図より $4630+4786=9416$ が答えとなる。

答 9416 通り

$\boxed{6}$

ポップコーンを買う店をア、アイスを買う店をイ、ポテトチップスを買う店をウとする。
まず、10 で割り切れない金額のおつり (これを「1 円単位のおつり」と言う) をどの店でもらうか (勿論複数かもしれない) ということを考えてみる。
最初に持っている金額を 10 で割った余りで分類して考える。

最初の所持金を 10 で割った余り	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
アで 1 円単位のおつりをもらうか	○	○	×	×	×	○	○	×	×	×
イで買った直後の所持金を 10 で割った余り	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
ウで 1 円単位のおつりをもらうか	×	×	○	○	○	×	×	○	○	○

この表より、「アかウのどちらか一方で 1 円単位のおつりをもらう」ことが分かる。

アで 1 円単位のおつりをもらうとする。
ウでは 10 で割り切れるおつりをもらうことになる。
さらに、ウで買う直前の所持金を 10 で割った余りが $3, 4, 8, 9$ であることと、ポテトチップスの値段が 103 円であることと、おつりの枚数が最小となるように X 君がお金を払うことより、ウでは 100 で割り切れるおつりをもらうことになる。
ウで買う直前の所持金は $1000 - 122 - 405 = 473$(円) 未満なので、ウでもらうおつりは「100 円玉何枚か」となる。よって X 君は 103 円のポテトチップスを買うのに少なくとも 500 円玉を 1 枚出したことになるが、これは所持金が 473 円未満のはずなのでおかしい。

ウで 1 円単位のおつりをもらうとする。
アでは 10 で割り切れるおつりをもらうことになる。
アで 100 で割り切れるおつりをもらうとすると、上と同じ考え方で、アでは少なくとも 500 円玉を 1 枚出したことになるが、このとき最初の所持金が 602 円未満ということになり、これだと 3 つの物を買うのにお金が足りなくなる。
よって、アでは 10 で割り切れるが 100 では割り切れないおつりをもらうこととなる。

このことから、最初の所持金を 100 で割った余りとして考えられるのは、
2〜4, 7〜9, 12〜14, 17〜19, 52〜54, 57〜59, 62〜64, 67〜69 となる。
あとは大きいほうから一つずつ試していく。
969 円 $\rightarrow A = 3, B = 1, C = 3 \rightarrow A \times B \times C = 9$
968 円 $\rightarrow A = 3, B = 1, C = 3 \rightarrow A \times B \times C = 9$
967 円 $\rightarrow A = 3, B = 1, C = 3 \rightarrow A \times B \times C = 9$
964 円 $\rightarrow A = 3, B = 2, C = 2 \rightarrow A \times B \times C = 12$
よって、答えは 964。

答 964 円

$\boxed{7}$

それぞれの皿にのっているまんじゅうの個数を2進法で表すことを考える。次に、3つの皿についてまんじゅうの個数を2進法表示したものを繰り上がりをさせずに足し合わせる。これで出来る数の各桁は、$0, 1, 2, 3$ のいずれかである。この数を□とする。
この数の全ての桁が偶数である状態を A、それ以外の状態を B と名づける。

(i) まんじゅうをうまく取れば、B の状態から A の状態にすることが出来る。

(ii) どのようにまんじゅうをとっても、A の状態からは B の状態になる。

の、2つのことを示す。

(i) □が B の状態のとき、□の中で最も上の位にある奇数の桁に注目する。のっているまんじゅうの個数を2進法表示したときにここの桁が奇数になっている皿からまんじゅうを取る。(そのような皿が複数ある場合はどれでもよい) この皿にのっているまんじゅうの個数を2進法表示した数を○とする。
□が奇数になっている桁で、○で1となっている桁は0に、0となっている桁は1になるようにまんじゅうを取る。
このようにすれば、□の奇数になっていた桁は全て偶数になるので、A の状態にできる。
□において奇数になっている最も上の桁は1から0になるようにまんじゅうを取るので、この操作によってまんじゅうを増やさなければならなくなることはなく、まんじゅうを減らすように取ることができる。

例えば、それぞれの皿にア : 33 個 , イ : 15 個 , ウ : 53 個のようにまんじゅうがのっていたとする。
これらを 2 進法表示するとア : 100001, イ : 1111, ウ 110101 となり、□は 211213 となる。これは B の状態である。
□において奇数になっている最高の桁は $2\underline{\underline{1}}1213$ だからここの桁が 1 になっている皿を探すと、ウがそうであるから、ウからまんじゅうを取る。
□の奇数になっている桁は $2\underline{11}2\underline{13}$ なので、ウについて、$1\underline{10}1\underline{01}$ が $1\underline{01}1\underline{10}$ となるようにまんじゅうを取る。すなわち、ウの皿から 7 個取って 46 個になるようにすると、□は $2\underline{02}2\underline{22}$ となり、これは A の状態となっている。

(ii) ひとつの皿からまんじゅうを取るならば、その皿に載っているまんじゅうの個数を 2 進法表示したときにいずれかの桁は 1 から 0 もしくは 0 から 1 に変化する。だから□が A の状態、すなわちの全ての桁が偶数となっている状態からまんじゅうを取ることによって、いずれかの桁は奇数となる。
どの桁も奇数にならないためには全ての桁を変化させない必要があり、これはまんじゅうを取らないことになるから不可である。
よって A の状態からはまんじゅうを取ることによって必ず B の状態になる。

以上より最善を尽くせば、□の初期状態が B であれば先手必勝、A であれば後手必勝である。

□の初期状態が B である場合 :
まず先手は□の状態が A となるようにまんじゅうを取る。後手はどのようにまんじゅうを取っても□の状態を B にすることしかできない。その後も同様に先手が□の状態が B から A となるようにまんじゅうを取り、後手が状態を B に戻す、ということを繰り返す。
最後のまんじゅうを取るには、すべての皿にのっているまんじゅうの個数が 0 としなければならないので□の状態は A にしなければならない。
しかし、このように先手が最善を尽くせば後手は□の状態を B にすることしかできないので最後のまんじゅうを取ることはできない。よって先手必勝である。

□の初期状態が A である場合 :
まず、先手がまんじゅうを取った後□の状態は B である。その後、後手が□の状態が B から A となるようにまんじゅうを取り、先手が状態を B に戻す、ということを繰り返す。
このように後手が最善を尽くせば、□の初期状態が B であるときと同様に先手は最後のまんじゅうを取ることができないから、後手必勝である。

問題になっているのは、最初さらにのっているまんじゅうの個数が
ア : $41 = 101001(2)$, イ : $29 = 11101(2)$ となっている場合である。
これを足すと 112102 となり、□は A の状態でなければならないからもう一つの皿ウは $52 = 110100$ 個あればよい。このとき□は 222202。これ以外の場合、□の状態は B となるので、52 個が唯一正解である。

答 <u>52 個</u>

$\boxed{8}$
※ ${}_pC_q$ は p 個から q 個 を選ぶときの選び方の数、すなわち

$$\frac{p\times(p-1)\times\cdots\times(q+1)}{q\times(q-1)\times\cdots\times1}$$

を表す。
$(\overbrace{a,b,c,\ldots,x}^{N\text{ 個}})$ で、「つながっている部分」が N 個あり、それぞれの部分の点の個数が a 個 , b 個 , c 個 $\ldots$, x 個であるような結び方の数を表すことにする。
例えば、$(1,1,3)$ は孤立した点が 2 個と、結ばれた 3 つの点の集まりが 1 個ある状態の、$(2,3)$ は、線分が 1 本と結ばれた 3 つの点の集まりが 1 個ある状態の結び方の数を表している。
問題で問われているのは (5) が何通りあるかである。
まず、M 個の点があったときの全ての結び方は、M 個の内のすべての 2 点について結ぶかどうかを決められるので $2^{{}_MC_2}$ 通りある。
a 個 , b 個 , $\ldots$, x 個のようにつながっている部分が分けられるような結び方は、a 個 , b 個 , $\ldots$, x 個となるような点の分け方があり、そのそれぞれの分け方について a 個が全てつながり、かつ b 個が全てつながり、…かつ x 個が全てつながるような結び方があるので、

$$\begin{aligned}(a,b,c,\ldots,x) &= a\text{ 個},b\text{ 個},\ldots,x\text{ 個となるつながっている部分の分け方}\\ &\quad\times(a)\times(b)\times(c)\times\cdots\times(x)\end{aligned}$$

のようになる。

全部の点の数が 1 個の時を考える。(1) の 1 つの場合がある。全部で 1 通りの結び方がある。

$$(1) = 1\text{通り}$$

全部の点の数が 2 個の時を考える。$(1,1), (2)$ の 2 つの場合がある。全部で $2^{{}_2C_2} = 2$ 通りの結び方がある。

$$\begin{aligned}
(1,1) &= 1\text{通り} \times 1 \times 1 &&= 1\text{通り} \\
(2) &= 2 - (1,1) \\
&= 1\text{通り}
\end{aligned}$$

全部の点の数が 3 個の時を考える。$(1,1,1), (1,2), (3)$ の 3 つの場合がある。全部で $2^{{}_3C_2} = 8$ 通りの結び方がある。

$$\begin{aligned}
(1,1,1) &= 1\text{通り} \times 1 \times 1 \times 1 &&= 1\text{通り} \\
(1,2) &= {}_3C_2\text{通り} \times 1 \times 1 &&= 3\text{通り} \\
(3) &= 8 - (1,1,1) - (1,2) \\
&= 4\text{通り}
\end{aligned}$$

点の数が 4 個の時を考える。$(1,1,1,1), (1,1,2), (1,3), (2,2), (4)$ の 5 つの場合がある。全部で $2^{{}_4C_2} = 64$ 通りの結び方がある。

$$\begin{aligned}
(1,1,1,1) &= 1\text{通り} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 &&= 1\text{通り} \\
(1,1,2) &= {}_4C_2\text{通り} \times 1 \times 1 \times 1 &&= 6\text{通り} \\
(1,3) &= {}_4C_3\text{通り} \times 4 &&= 16\text{通り} \\
(2,2) &= {}_4C_2 \div 2\text{通り} \times 1 \times 1 &&= 3\text{通り} \\
(4) &= 64 - (1,1,1,1) - (1,1,2) - (1,3) - (2,2) \\
&= 38\text{通り}
\end{aligned}$$

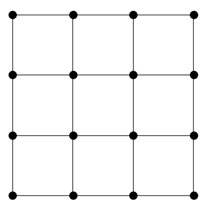
点の数が 5 個の時を考える。
$(1,1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(2,3),(1,4),(5)$ の 7 つの場合がある。全部で $2^{{}_5C_2}=1024$ 通りの結び方がある。

$$
\begin{array}{lll}
(1,1,1,1,1) & = 1\text{通り} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 & = 1\text{通り} \\
(1,1,1,2) & = {}_5C_2\text{通り} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 & = 10\text{通り} \\
(1,1,3) & = {}_5C_3\text{通り} \times 1 \times 1 \times 4 & = 40\text{通り} \\
(1,2,2) & = {}_5C_1 \times {}_4C_2 \div 2\text{通り} \times 1 \times 1 \times 1 & = 15\text{通り} \\
(2,3) & = {}_5C_2\text{通り} \times 1 \times 4 & = 40\text{通り} \\
(1,4) & = {}_5C_1\text{通り} \times 1 \times 38 & = 190\text{通り} \\
(5) & = 1024 - (1,1,1,1,1) - (1,1,1,2) - (1,1,3) & \\
 & \ -(1,2,2) - (1,4) - (2,3) & \\
 & = 728\text{通り} &
\end{array}
$$

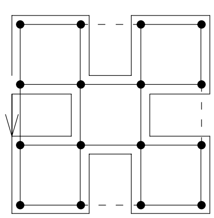
答 728 通り

$\boxed{9}$

各点から出ている辺の数を考える。一筆書きが可能であるためには、
始点と終点が同じ点である場合すべての点において出ている辺の数が偶数である必要があり、始点と終点が異なった点である場合始点、終点から出ている辺の数が奇数で他の点から出ている辺の数が偶数である必要がある。
書き始めと書き終わりをぞいて、一筆書きである辺を通ってある点に来たときは必ず来た辺と別の辺から他の点に行かなければならないから、その点から出ている辺の数は通った回数の２倍となっている。また始点と終点では書き始めと書き終わりの辺が加わるので、始点と終点が同じ点である場合その点から出ている辺の数は書き始めと書き終わり以外でその点を通った回数の２倍に２を加えたものとなっており、始点と終点が異なっている場合始点、終点から出ている辺の数は書き始め以外で始点を通った回数に１を加えたもの、書き終わり以外で終点を通った回数に１を加えたものとなるからである。



上図のような格子について考えると、出ている辺が偶数本ある点は８個、奇数本ある点は８個ある。
ここで、下図のように、点線で描かれた辺を通らなくてもよいとすると、出ている辺が偶数本ある点は１４個、奇数本ある点は２個あるようになり、図のように一筆書きが可能である。通らなくてよい辺が２本以下ならば一筆書きは不可能である。



このような一筆書きの途中で点線の辺を往復して通れば、すべての辺を通ることができる。そのとき 3 本の辺のみ 2 度通ったので
$24+3=27cm$ 動いたことになる。2 度通る辺は 2 本以下ではないから、これが最短の道のりである。

答え $\underline{27cm}$

$\boxed{10}$

下図のように各点を定める

但し

F は $\angle OEF = 80^\circ, \angle DEF = 10^\circ$ となる OD 上の点

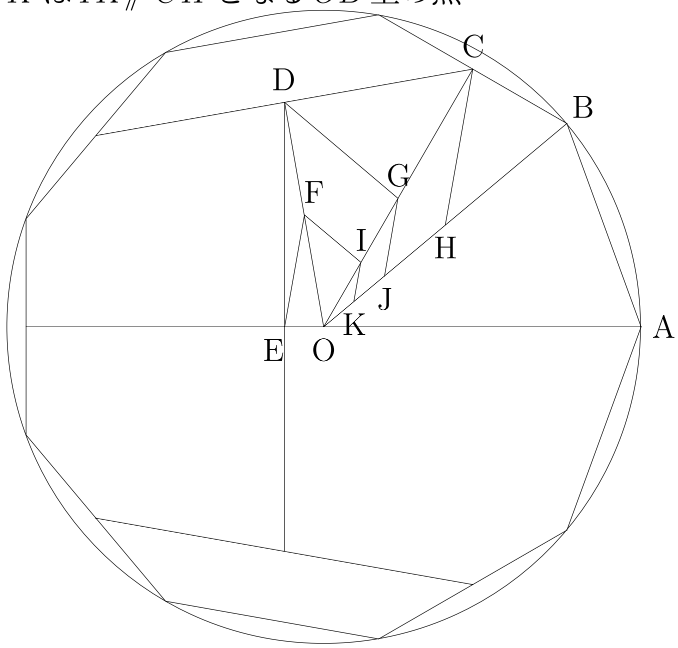
G は $\angle ODG = 40^\circ, \angle CDG = 50^\circ$ となる OC 上の点

H は $\angle OCH = 20^\circ, \angle BCH = 70^\circ$ となる OB 上の点

I は $FI /\!/ DG$ となる OC 上の点

J は $GJ /\!/ CH$ となる OB 上の点

K は $IK /\!/ CH$ となる OB 上の点



$\angle EOF = 80^\circ, \angle EDF = 70^\circ$ から $\triangle FOE, \triangle FDE$ は二等辺三角形となるので $FO = FE = FD$ となる。同様に、

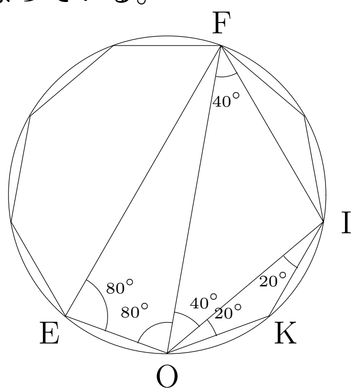
$\angle DOG = 40^\circ, \angle DCG = 50^\circ$ から $\triangle GOD, \triangle GCD$ は二等辺三角形となるので $GO = GD = GC$ となり、

$\angle COH = 20^\circ, \angle CBH = 70^\circ$ から $\triangle HOC, \triangle HBC$ は二等辺三角形となるので $HO = HC = HB$ となる。

よって

$$\begin{aligned}&OK:OB\\=\ &OK:OH\times 2\\=\ &OI:OC\times 2\\=\ &OI:OG\times 4\\=\ &OF:OD\times 4\\=\ &1:8\end{aligned}$$

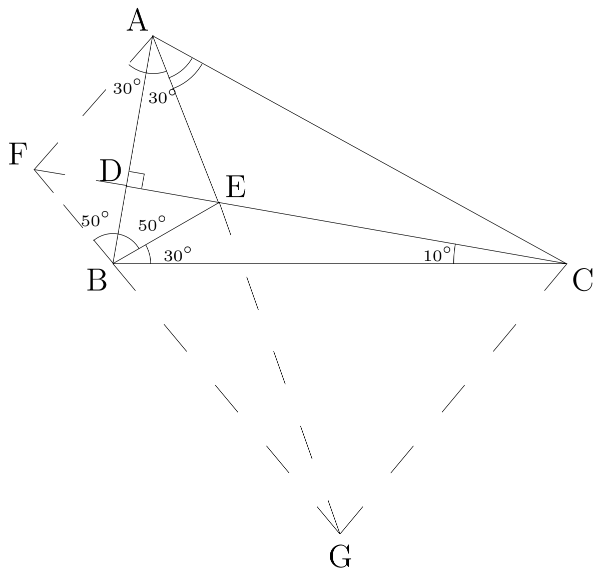
となる。
ここで、O,E,F,I,K は下図のように正九角形を構成する頂点の一部となっている。



よって OE,OK がそれぞれ正九角形の一辺をなすので
$OE:OA=OK:OB=1:8$ となる。

答 $\underline{1:8}$

$\boxed{11}$



図のように F を E の AB に関する対称点とし、G を $\triangle BCE$ の外接円の中心とする。

$\angle EAF = 60°, AE = AF$ より、$\angle EAF = \angle AEF = \angle AFE$

すなわち、$\triangle AEF$ は正三角形となる。$\cdots(1)$

一方、$\triangle GBE, \triangle GCE, \triangle GBC$ が二等辺三角形となっているので、

$$\begin{aligned}\angle GEC &= \angle GCE\\ &= \angle GCB + 10°\\ &= \angle GBC + 10°\\ &= \angle GBE - 30° + 10°\\ &= \angle GEB - 20°\end{aligned}$$

であるが、$\angle GEB + \angle GEC = 180° - 30° - 10° = 140°$ より、

$\angle GEB \times 2 - 20° = 140°$

よって $\angle GEB = 80°$

ここで、$\angle GCE = \angle GEC = \angle CEB - \angle GEB = 60°, \angle CGE = 180° - 60° - 60° = 60°$ より $\triangle GCE$ は正三角形となっている。$\cdots(2)$

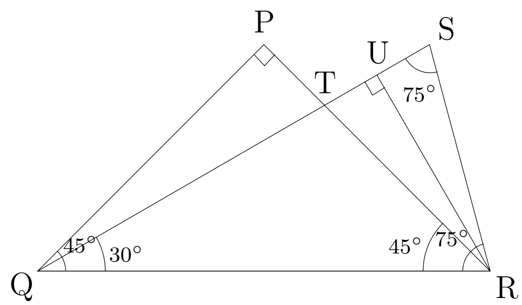
$(1), (2)$ より、$EA = EF, EC = EG,$ また $\angle AEC = \angle FEG$ なので

$\triangle AEC$ と FEG は合同であるから、$\angle EAC = \angle EFG$ である。

また、$\angle GBF = 50^\circ + 50^\circ + 30^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ より F, B, G は一直線上にあるので $\angle EFG = \angle EFB$ である。
$\triangle BEF$ は二等辺三角形だから、$\angle EFB = (180^\circ - 50^\circ - 50^\circ) \div 2 = 40^\circ$
よって $\angle EAC = 40^\circ$ となる。

答 <u>40 度</u>

$\boxed{12}$



図で、$\triangle PQR$ は $\angle QPR = 90^\circ$ の直角二等辺三角形、$\triangle QRS$ は
$\angle RQS = 30^\circ, QR = QS$ の二等辺三角形である。
PR と QS の交点を T、R から QS に下ろした垂線の足を U とする。
QR を底辺と見た時の $\triangle PQR$ の高さは $\dfrac{1}{2} \times QR$、QR を底辺と見た時の
$\triangle QRS$ の高さは $\dfrac{1}{2} \times QS = \dfrac{1}{2} \times QR$ である。
よって、$\triangle PQR = \triangle QRS$
したがって、$\triangle PQT = \triangle PQR - \triangle QRT = \triangle QRS - \triangle QRT = \triangle RST$
また、$\angle RTS = \angle QRS + \angle PRQ = 75^\circ = \angle RST$ より、$\triangle RST$ は二等辺
三角形なので、$\triangle RTU = \dfrac{1}{2} \times \triangle RST$
$\triangle PQT, \triangle RTU$ はどちらも 3 角が $15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ である三角形で、
$PT + TR = PR = PQ$ となっているので、
$\triangle ABC : \triangle DEF = \triangle PQT : \triangle RTU$

よって

$$\begin{aligned}\triangle ABC : \triangle DEF &= \triangle PQT : \triangle RTU \\ &= \triangle PQT : \frac{1}{2} \times \triangle RST \\ &= \triangle PQT : \frac{1}{2} \times \triangle PQT \\ &= 2 : 1\end{aligned}$$

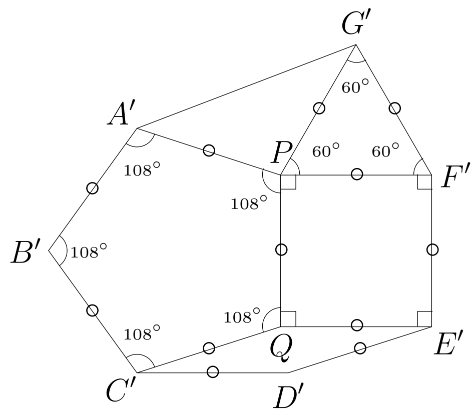
答 $\underline{2 : 1}$

$\boxed{13}$

下図のような図形を考える。

$$\begin{cases} \text{三角形 } G'PF \text{ は正三角形} \\ \text{四角形 } E'F'PQ \text{ は正方形} \\ \text{五角形 } PQC'B'A' \text{は正五角形} \\ \text{三角形 } PA'Q' \text{は二等辺三角形} \\ \text{四角形 } C'D'E'Q \text{ は平行四辺形} \end{cases}$$

である。



角 $A', B', C', D', E', F', G'$ の大きさをもとめると

$\angle A'PG' = 360^\circ - 108^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 102^\circ$ より

$\angle PA'G' = \angle PG'A' = (180^\circ - 102^\circ) \div 2 = 39^\circ$

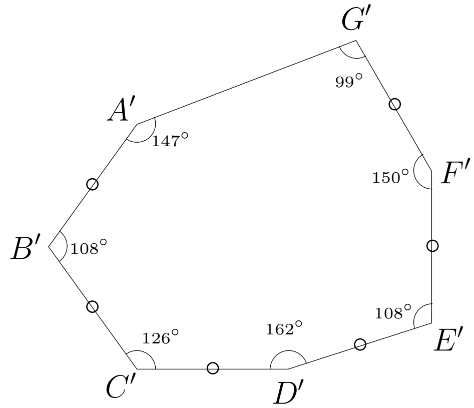
$\angle C'QE = 360^\circ - 108^\circ - 90^\circ = 162$ より

$\angle D'C'Q = \angle D'E'Q = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ, \angle C'D'E' = 162^\circ$

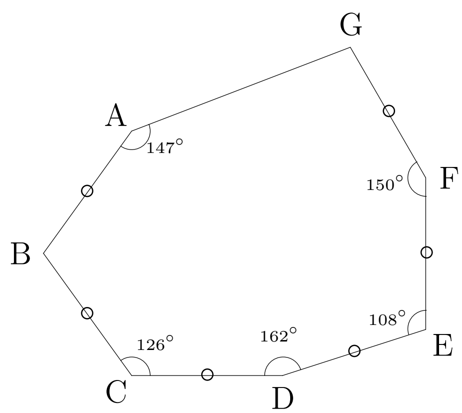
となるから、下図のように

$$\begin{aligned} &\angle A' = 108^\circ + 39^\circ = 147^\circ \\ &\angle B' = 108^\circ \\ &\angle C' = 108^\circ + 18^\circ = 126^\circ \\ &\angle D' = 162^\circ \\ &\angle E' = 18^\circ + 90^\circ = 108^\circ \\ &\angle F' = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \\ &\angle G' = 60^\circ + 39^\circ = 99^\circ \end{aligned}$$

となる。

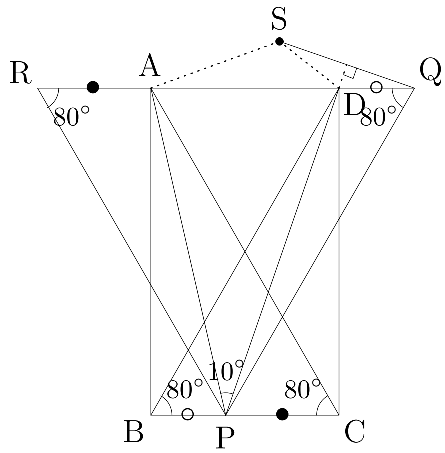


この 7 角形 $A'B'C'D'E'F'G'$ と下図の求める 7 角形 $ABCDEFG$
を比較すると、
6 角形 $B'C'D'E'F'G'$ と 6 角形 $BCDEFG$ が合同になっているので
$A', B', C', D', E', F', G'$ を A, B, C, D, E, F, G に重ねることができる。
$A'B' = AB, \angle A' = \angle A$ よりその時 A' と A も重なっていることが分かる。
よって 7 角形 $A'B'C'D'E'F'G'$ と 7 角形 $ABCDEFG$ は合同となってい
るので $\angle G = \angle G' = 99°$ となる。



答 99 度

$\boxed{14}$



直線 AD 上に、BD と PQ、CA と PR が平行となるような点 Q, R をとり、PD に関する Q の対称点を S とする。
このとき、

$$PR = PQ = PS$$

また、

$$\begin{aligned}\angle APR &= 180^\circ - 80^\circ \times 2 - 10^\circ - \angle DPQ \\ &= 10^\circ - \angle DPQ \\ &= 10^\circ - \angle DPS \\ &= \angle APS\end{aligned}$$

なので、S は PA に関する R の対称点だと分かる。
よって $AS = AR = CP, DS = DQ = BP$ なので
$\triangle ASD$ は辺 AD, BP, DQ の 3 辺の長さで作られる三角形である。
また $QR = AR + AD + DQ = CP + AD + BP = AD + BC$ より
三角形 PQR と四角形 $ABCD$ の面積は等しいから、
四角形 $ABCD$ の面積を 9 と置くと

$$\triangle PQR = ⑨$$
$$\triangle SAD = ①$$

$$
\begin{aligned}
& (\triangle APR + \triangle DPQ) \times 2 \\
= \ & \triangle APR + \triangle APS + \triangle DPQ + \triangle DPS \\
= \ & \triangle PQR + \triangle SAD \\
= \ & ⑨ + ① = ⑩
\end{aligned}
$$

よって

$$\triangle APR + \triangle DPQ = ⑤$$

$$\triangle APD = ⑨ - ⑤ = ④$$

ゆえに

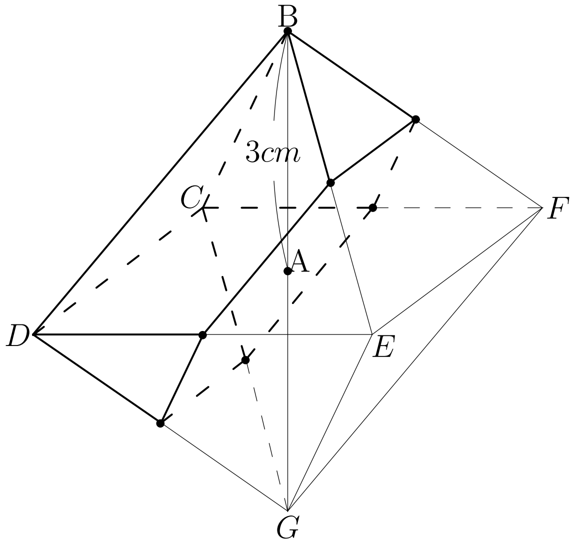
$$AD : BC = AD : (AR + DQ) = 4 : 5$$

となる。

答 <u>4 : 5</u>

$\boxed{15}$

図のように、組み立てた立体は中心と各頂点の距離が 3cm となるような正八面体を半分に切った立体になる。



正方形 $CDEF$ の面積は $3 \times 3 \times \dfrac{1}{2} \times 4 = 18cm^2$ となるので

正八面体の体積は $18 \times 3 \times \dfrac{1}{3} \times 2 = 36cm^3$

求める立体の体積は $36 \times \dfrac{1}{2} = 18cm^3$

答 $\underline{18cm^3}$