2006年度灘中入試模試解説

$\boxed{1}$

$2006 = 2 \times 17 \times 59$ より、選んだ 3 つの自然数の中に、17 の倍数,59 の倍数は必ずある。

$(a)1003(= 17 \times 59)$ の倍数があるとき

3 つの和は 2006 なので、2006 以上の数はないから、3 つのうち 1 つは 1003 である。

残りの 2 つの数の和は 1003 で奇数なので、残りの 2 つのうち 1 つは偶数で、もう 1 つは奇数である。

よって、3 数は (1003, 偶数, 奇数) となるので、最小公倍数は 2006 の倍数となる。

したがって、この場合は、$(1003, 1, 1002), (1003, 2, 1001), \cdots (1003, 501, 502)$ の 501 通りが条件を満たす。

$(b)1003(= 17 \times 59)$ の倍数がないとき

3 つの数は、$(59 \times \bigcirc, 17 \times \square, \triangle)$ と表せる。

$59 \times \bigcirc$ は 2006 未満で 1003 の倍数ではないので、

$59 \times 1, 59 \times 2, \cdots, 59 \times 16, 59 \times 18, \cdots, 59 \times 33$ のいずれかである。

例えば $59 \times \bigcirc$ が 59×1 のとき、$17 \times \square + \triangle = 2006 - 59 = 59 \times 33$ より、$17 \times \square$ は 59×33 未満の 17 の倍数で、1003 の倍数ではないので、$(\square, \triangle)$ の組の数は 59×33 未満の 17 の倍数のうち 1003 以外のものの個数に等しく、

$\left[\dfrac{59 \times 33}{17}\right] - 1$ 通りである。($[x]$ で x 以下の最大の整数を表す)

同様にして、$59 \times \bigcirc$ が $59 \times 2, \cdots, 59 \times 16$ のときは

$\left[\dfrac{59 \times 32}{17}\right] - 1, \cdots, \left[\dfrac{59 \times 18}{17}\right] - 1$ 通りで、

$59 \times \bigcirc$ が $59 \times 18, \cdots, 59 \times 33$ のときは $\left[\dfrac{59 \times 16}{17}\right], \cdots, \left[\dfrac{59 \times 1}{17}\right]$ 通りである。

これらをすべて足すと、

$$\left(\left[\frac{59 \times 33}{17}\right] - 1\right) + \cdots + \left(\left[\frac{59 \times 18}{17}\right] - 1\right) + \left[\frac{59 \times 16}{17}\right] + \cdots + \left[\frac{59 \times 1}{17}\right]$$

$$= \left[\frac{59 \times 33}{17}\right] + \cdots + \left[\frac{59 \times 18}{17}\right] + \left[\frac{59 \times 16}{17}\right] + \cdots + \left[\frac{59 \times 1}{17}\right] - 16$$

$\left[\dfrac{59 \times 33}{17}\right] + \cdots + \left[\dfrac{59 \times 18}{17}\right]$ において、両端から 2 つずつ組にして足していく。

例えば $\left[\dfrac{59 \times 33}{17}\right] + \left[\dfrac{59 \times 18}{17}\right]$ を考える。

$\dfrac{59 \times 33}{17} - \left[\dfrac{59 \times 33}{17}\right]$ は $\dfrac{59 \times 33}{17}$ の小数部分なので、0 より大きく 1 未満。

$\dfrac{59\times 18}{17}-\left[\dfrac{59\times 18}{17}\right]$ は $\dfrac{59\times 18}{17}$ の小数部分なので、0 より大きく 1 未満。
よって、
$\dfrac{59\times 33}{17}-\left[\dfrac{59\times 33}{17}\right]+\dfrac{59\times 18}{17}-\left[\dfrac{59\times 18}{17}\right]=177-\left[\dfrac{59\times 33}{17}\right]-\left[\dfrac{59\times 18}{17}\right]$
は 0 より大きく 2 未満で、整数なので 1 である。
したがって、$\left[\dfrac{59\times 33}{17}\right]+\left[\dfrac{59\times 18}{17}\right]=176$
$\left[\dfrac{59\times 32}{17}\right]+\left[\dfrac{59\times 19}{17}\right]$ なども同様なので、
$\left[\dfrac{59\times 33}{17}\right]+\cdots+\left[\dfrac{59\times 18}{17}\right]=176\times 8$
同様にして、$\left[\dfrac{59\times 16}{17}\right]+\cdots+\left[\dfrac{59\times 1}{17}\right]=58\times 8$
よって、
$\left[\dfrac{59\times 33}{17}\right]+\cdots+\left[\dfrac{59\times 18}{17}\right]+\left[\dfrac{59\times 16}{17}\right]+\cdots+\left[\dfrac{59\times 1}{17}\right]-16$
$=176\times 8+58\times 8-16$
$=1856$
したがってこの場合は 1856 通り。
$(a),(b)$ より、全部で $501+1856=2357$ 通り。

答 2357 通り

$\boxed{2}$

ある素数を p、ある偶数を n とする。

また、A を B 回掛け合わせたものを A^B で表す。特に、$B=0$ のとき、
$A^0=1$ だと考える。
まず、一般にある整数の約数の和がどのように表されるかを考える。
その整数が次のように素因数分解されたとする。

$$a^k \times b^l \times c^m \times \cdots$$

このとき、各約数は、$a^x \times b^y \times c^z \times \cdots$ の形で表される。a^x は
$1, a, a^2, \ldots, a^k$ のいずれかで、b^y, c^z についても同様である。各約数はこれらの中から一つずつ選んで掛け合わせたものになっている。これから、これら約数の和は

$$(1+a+\cdots+a^k)\times(1+b+\cdots+b^l)\times(1+c+\cdots+c^m)\times\cdots$$

で表される。
例えば、$60=2^2\times3\times5$ の約数の和は

$$(1+2+2^2)\times(1+3)\times(1+5)=168$$

と求められる。

p が 2 でないとき、
n を素因数分解したものを

$$n=2^a\times p^b\times s^c\times t^d\times\cdots$$

とおくと。

n の約数の和は、

$$(1+2+4+\cdots+2^a)\times(1+p+p^2+\cdots+p^b)\times(1+s+s^2+\cdots+s^c)\times\cdots$$

このうち、偶数であるものの和は、

$$(2+4+\cdots+2^a)\times(1+p+p^2+\cdots+p^b)\times(1+s+s^2+\cdots+s^c)\times\cdots$$

である。

$p\times n$ の約数の和は、

$$(1+2+4+\cdots+2^a)\times(1+p+p^2+\cdots+p^b+p^{b+1})\times(1+s+s^2+\cdots+s^c)\times\cdots$$

このうち、奇数であるものの和は、

$$(1+p+p^2+\cdots+p^b+p^{b+1})\times(1+s+s^2+\cdots+s^c)\times\cdots$$

である。これらが等しいので、

$$(2+4+\cdots+2^a)\times(1+p+p^2+\cdots+p^b)=(1+p+p^2+\cdots+p^b+p^{b+1})$$

が成り立っている。
$1+p+p^2+\cdots+p^b+p^{b+1}=(1+p+p^2+\cdots+p^b)\times p+1$ だから、
$\dfrac{1+p+p^2+\cdots+p^b+p^{b+1}}{1+p+p^2+\cdots+p^b}=(\text{整数})$ となるには、

$$\frac{1+p+p^2+\cdots+p^b+p^{b+1}}{1+p+p^2+\cdots+p^b}=p+\frac{1}{1+p+p^2+\cdots+p^b}$$

より、$b=0$ でなければならない。
このとき、

$$2+4+\cdots+2^a=1+p$$

となるので、このような p は $5,13,29,61,509$ となる。

$p=2$ のとき、
n を素因数分解したものを

$$n=2^a\times s^b\times t^c\times\cdots$$

とおくと、

$$1=2+4+\cdots+2^a$$

となるはずだが、これはありえない。
よって、条件を満たす素数は $5,13,29,61,509$ の 5 つで、答えは、617。

答 <u>617</u>

$\boxed{3}$

$10, 27, \square$ で作ることのできない最大の自然数が 129 なので、一の位が 9 である自然数のうち 27 と $\square$ で作ることができるものの最小は 139 である。

$(9, 19, \cdots, 139$ のどれも 27 と $\square$ で作ることができないとすると、$10, 27, \square$ で 139 を作ることができないことになる。また、$9, 19, \cdots, 129$ のどれかが 27 と $\square$ で作れるとすると、10 をいくつか足すことで 129 が作れてしまう。)

$27 \times \bigcirc + \square \times \triangle = 139$ となる可能性のある $(\bigcirc, \triangle)$ の組を、$\square$ の一の位で場合分けして書き出す。

$27 \times \bigcirc$ は 139 以下なので、$\bigcirc$ は 5 以下。

$\bigcirc$ を固定するとき、$\triangle$ としてありえるのは、$27 \times \bigcirc + \square \times \triangle$ の一の位が 9 となるような $\triangle$ のうち最小のものである。

$\square$ の一の位	$(\bigcirc, \triangle)$
0	$\times$
1	$(0,9), (1,2), (2,5), (3,8), (4,1), (5,4)$
2	$(1,1), (3,4), (5,2)$
3	$(0,3), (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8)$
4	$(1,3), (3,2), (5,1)$
5	$(2,1)$
6	$(1,2), (3,3), (5,4)$
7	$(0,7), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2)$
8	$(1,4), (3,1), (5,3)$
9	$(0,1), (1,8), (2,5), (3,2), (4,9), (5,6)$

$\square$ の一の位が $0 \sim 9$ のそれぞれの場合について、$27 \times \bigcirc + \square \times \triangle$ が最小となる可能性のあるものは、以下の通り。

$\square$ の一の位	$(\bigcirc, \triangle)$
0	$\times$
1	$(0,9), (1,2), (4,1)$
2	$(1,1)$
3	$(0,3)$
4	$(1,3), (3,2), (5,1)$
5	$(2,1)$
6	$(1,2)$
7	$(0,7), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2)$
8	$(1,4), (3,1)$
9	$(0,1)$

$27 \times \bigcirc + \square \times \triangle = 139$ に $(\bigcirc, \triangle)$ を代入して、$\square$ を求めると、$\square$ としてありえるのは以下の通り。($\square$ が整数であることと、$\square$ の一の位の条件に注意。)

□の一の位	□
0	$\times$
1	31
2	112
3	$\times$
4	4
5	85
6	56
7	17
8	$28, 58$
9	139

$31 \to 10 \times 4 + 27 \times 1 + 31 \times 2 = 129$ より不適。
$112 \to 133$ が作れないので不適。
$4 \to 10 \times 9 + 27 \times 1 + 4 \times 3 = 129$ より不適。
$85 \to 133$ が作れないので不適。
$56 \to 10 \times 1 = 10, 27 \times 3 = 81, 56 \times 2 = 112, 27 \times 1 + 56 \times 1 = 83, 27 \times 2 = 54, 27 \times 5 = 135, 56 \times 1 = 56, 27 \times 1 = 27, 27 \times 4 = 108, 27 \times 1 + 56 \times 2 = 139$ より、これらに 10 をいくつか足すことで 130 以上はすべて作ることができ、129 は作ることができないので、適する。
$17 \to 10 \times 1 + 17 \times 7 = 129$ より不適。
$28 \to 10 \times 2 + 27 \times 3 + 28 \times 1 = 129$ より不適。
$58 \to 133$ が作れないので不適。
$139 \to 133$ が作れないので不適。
以上より、□は 56 である。

答 56 円

$\boxed{4}$
グループ X を (A, C, F, H), グループ Y を (B, D, E, G) とすると、X のどの点から Y のどの点へも直接移動することができ、Y のどの点から X のどの点へも直接移動することができる。
また、X のどの 2 点間も直接移動することはできず、Y のどの 2 点間も直接移動することはできない。
よって、A から出発すると、$A \to Y$ の点 $\to X$ の点 $\to Y$ の点 $\to X$ の点 $\to Y$ の点 $\to X$ の点 $\to Y$ の点 $\to A$ という経路を進むことになる。
「X の点」のところには C, F, H が 1 つずつ入り、「Y の点」のところには B, D, E, G が 1 つずつ入るので、このような経路は
$3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$ 通りある。

答 <u>144 通り</u>

$\boxed{5}$
まず、最初の条件「A は全部は持っていないが $BCDEF$ と合わせたら必ずそろう」より、$BCDEF$ は持っているが A は持っていないというカード $CARD_1$ が存在しなければならない。
次の条件より、たとえば BCD はもっていないが EF は持っているというカードが存在することになる。
BCD の誰も持っていないというカードは必ず存在し、もし、EF がそのカードを持っていなければ 4 人合わせても全カードそろわないからである。
このようなカードを書き並べてみると次のようになる。
カードの名前, 持っていない人, 持っている人の順に並べることにする。
$CARD_2, BCD, EF$
$CARD_3, BCE, DF$
$CARD_4, BCF, DE$
$CARD_5, BDE, CF$
$CARD_6, BDF, CE$
$CARD_7, BEF, CD$
$CARD_8, CDE, BF$
$CARD_9, CDF, BE$
$CARD_{10}, CEF, BD$
$CARD_{11}, DEF, BC$
以上のカードが必要になる。
このうちのどのひとつのカードが欠けるだけでも条件を満たさなくなる。
先ほどの $CARD_1$ とあわせて、${}_5C_3 + 1$ 枚必要。
また、先ほどの例から実際に可能な例を下に示す。
まず B の持っているべきカードは上記の例より

$$B : CARD_1, CARD_8, CARD_9, CARD_{10}, CARD_{11}$$

同様にして、$C : CARD_1, CARD_5, CARD_6, CARD_7, CARD_{11}$

$$D : CARD_1, CARD_3, CARD_4, CARD_7, CARD_{10}$$
$$E : CARD_1, CARD_2, CARD_4, CARD_6, CARD_9$$
$$F : CARD_1, CARD_2, CARD_3, CARD_5, CARD_8$$

さらに A は $CARD_1$ を持っていないが他のカード ($CARD_2$〜$CARD_{11}$) を持っていればよいということになる。よって、答えは 11 枚。

答 $\underline{11}$ 枚

$\boxed{6}$

a を b 回掛け合わせたものを a^b で表す。

掛け合わせて平方数となる 2 数は、$a \times b^2, a \times c^2$ の形をしている。

1 から 100 までの数を $a \times b^2$ の書き表し方で分類する。

同じグループに含まれた数は、その中から一つしか選ばれない。

また、違うグループの数は掛け合わせても平方数とならないので、それぞれのグループから 1 つずつ選ぶことができる。

$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

$\{2, 8, 18, 32, 50, 72, 98\}$

$\{3, 12, 27, 48, 75\}$

$\{5, 20, 45, 80\}$

$\{6, 24, 54, 96\}$

$\{7, 28, 63\}$

$\{10, 40, 90\}$

$\{11, 44, 99\}$

$\{13, 52\}$

$\{14, 56\}$

$\{15, 60\}$

$\{17, 68\}$

$\{19, 76\}$

$\{21, 84\}$

$\{22, 88\}$

$\{23, 92\}$

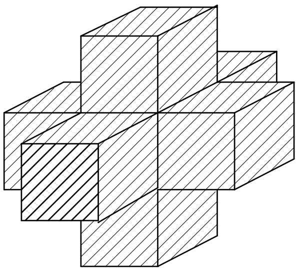
ほかは、掛け合わせて平方数となるような 1 から 100 までの数がないものである。

よって、求める答えは、61 個である。

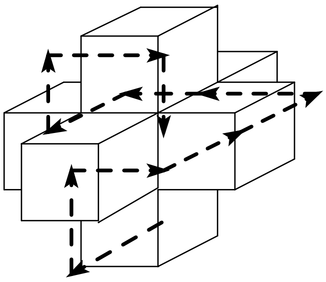
答 61 個

7

まず、移動不可能になるということは移動した時の立方体の周囲6つがすべてすでに通過した立方体であるということである。つまり、真ん中の立方体を最後に到達した立方体とすると以下の図の斜線部を通過しているということである。



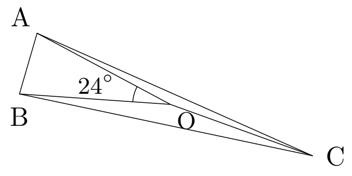
これらの、斜線部の立方体をすべて通過するように移動すればいいのだから以下の図のように移動するのが最短である。



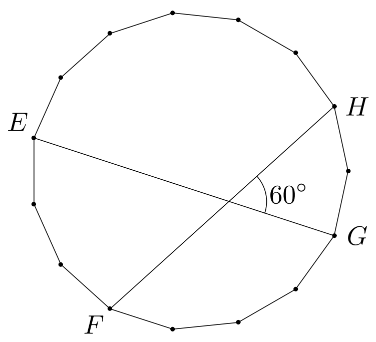
よって、最短手数は 11 手。

答 11 回

$\boxed{8}$
正十五角形は円に内接する。
この中心を点 O とする。また、ある一辺の端点を点 A, B とする。
このとき、$\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{15} = 24^\circ$ である。A, B でない正十五角形の点を C とする。



$\angle ACB = \angle ACO + \angle BCO = (\angle OAC + \angle OCA + \angle OCB + \angle OBC) \div 2 = \angle AOB \div 2 = 12^\circ$ となる。交わった対角線のなす角が 60° となったときの対角線を以下のようにそれぞれ EG, FH とする。



このとき、$\angle EHF + \angle HEG = 60^\circ$ となるから、E と F の間にある辺の数のうち少ない方と G と H の間にある辺の数のうち少ない方とを足し合わせた数は、$\dfrac{60}{12} = 5$ である。
これより、これらの組合せは $(1, 4)$ または $(2, 3)$ である。これらはそれぞれ $9 \times 15 = 135$ 通りあり、あわせて 270 通りである。

答 270 通り

$\boxed{9}$

動点 Q に対して、常に M に関して Q と対称な位置にあるように動く点 Q' をとると、Q' は E を出発して毎秒 36cm で

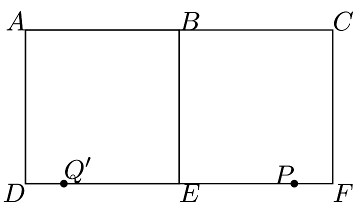
$E \to B \to C \to F \to E \to B \to A \to D \to E$ という経路を繰り返しまわる。このとき、P と Q が M に関して対称な位置にあるとは、P と Q' が一致するということである。

よってこの P と Q' についてダイヤグラムを描けばよい。

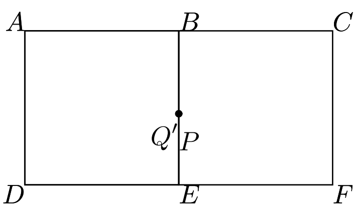
ここで、グラフの縦軸は $B \to E \to D \to A \to B$ または

$B \to E \to F \to C \to B$ と動く時の B からの距離をあらわすことにするが、P と Q' が異なる正方形上にあって BE 上にない場合、B からの距離が等しくても P と Q' は一致しないので、これらを区別し、

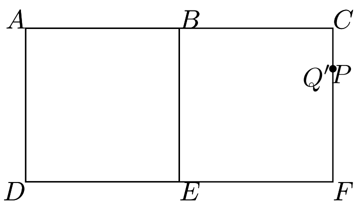
$B \to E \to D \to A \to B$ 上の移動を実線で表し、$B \to E \to F \to C \to B$ 上の移動を破線で表すことにする。このとき、ダイヤグラムにおいて、実線同士、破線同士の交点が、P と Q' の一致を表す。ただし、異なる正方形上を動いていても、BE 上で B からの距離が等しくなれば P と Q' は一致するので、これも含める。ダイヤグラム上では、BE 間 (上 $\frac{1}{4}$) にある交点は実線と破線の交点であっても数えるということになる。



(一致しない)

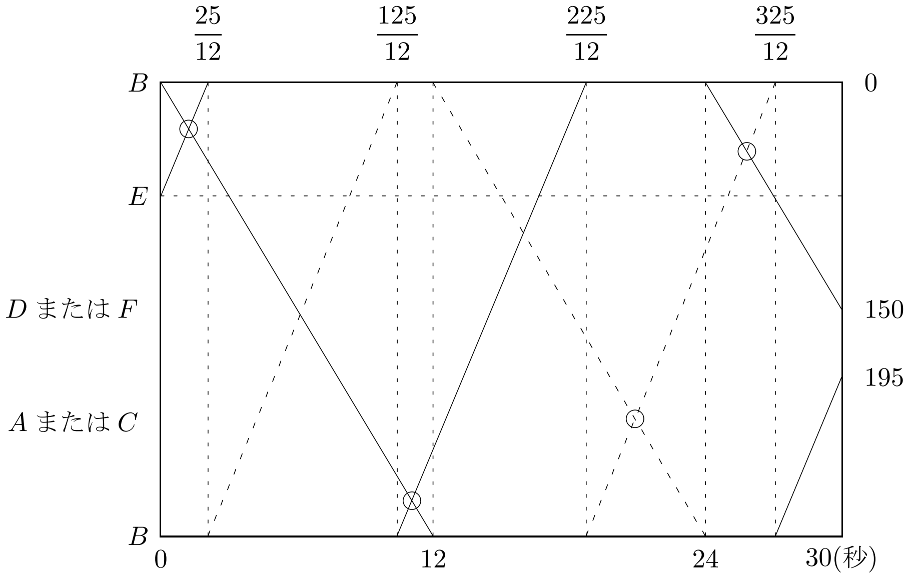


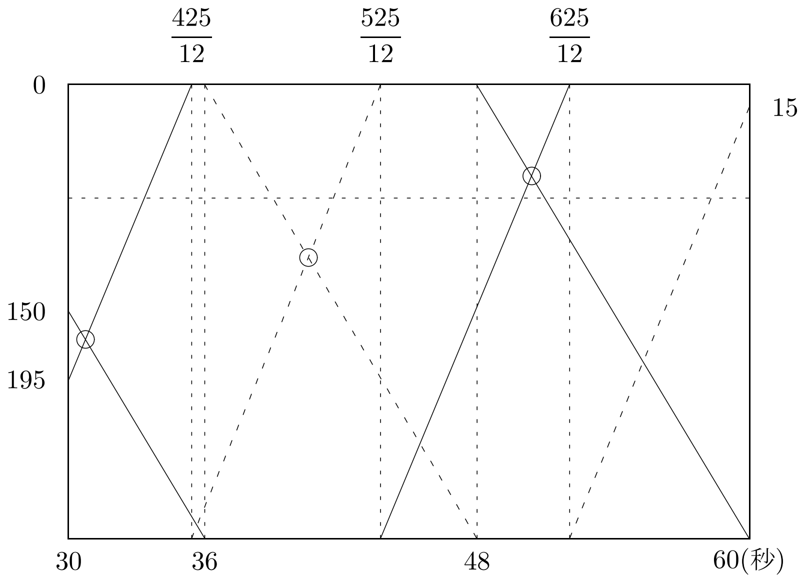
(一致する)



(一致する)

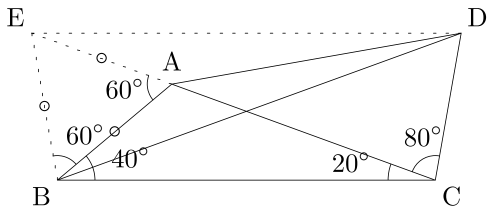
これにしたがってダイヤグラムを描けば、以下のようになり、条件に当てはまる交点を数えれば、P と Q' は 7 回一致することになる。横軸は最初に B を出発してからの時間 (右向き) で、縦軸は B からの距離 (下向き) である。





答 <u>7 回</u>

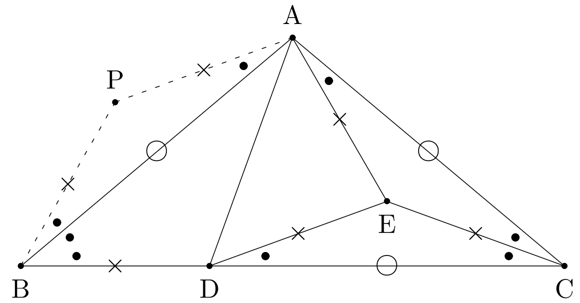
$\boxed{10}$



まず、図のように AB を一辺とするような正三角形 ABE を考える。
ここで、$\angle EBC = \angle DCB = 100°$ かつ、$EB = AB = CD$ より、四角形 $EBCD$ は等脚台形になる。
さらに、以上のことより $ED \mathbin{/\!/} BC$。E, A, C は一直線上にあるので、$\angle DEA = \angle BCA = 20°$ となる。
さらに、四角形 $EBCD$ は等脚台形なので $\angle DBC = \angle ECB = 20°$
つまり、$\angle EBD = 100° - 20° = 80°, \angle BED = 20° + 60° = 80°$
よって、三角形 DEB は二等辺三角形である。
さらに、$\angle EDB = 180° - \angle DEB - \angle DBE = 20°$
ここで、三角形 DEA と三角形 DBA を考えると三辺の長さが等しいことより合同であることがわかる。
つまり $\angle EDA = \angle BDA = 20° \div 2 = 10°$
よって $\angle ADB = 10°$

答 $\underline{10°}$

$\boxed{11}$



$AE = CE = DE$、$AC = DC$ より、$\triangle AEC$ と $\triangle DEC$ は合同なので、
$\angle EAC = \angle ECA = \angle ECD = \angle EDC$ $(= \bullet$ とする)。
また $AB = AC$ より $\angle ABC = \angle ACB = 2 \times \bullet$、$\angle BAC = 180^\circ - 4 \times \bullet$。

ここで、点 P を、$\triangle AEC$ と $\triangle APB$ が合同となるような位置にとる (図参照)。
このとき $\angle PBA = \angle PAB = \bullet$ なので、
$\angle PAE = \angle BAE + \bullet = \angle BAC - \bullet + \bullet = 180^\circ - 4 \times \bullet$。
よって二等辺三角形 PAE に注目すると、
$\angle AEP = \{180^\circ - (180^\circ - 4 \times \bullet)\} \div 2 = 2 \times \bullet$ であり、
また $\angle AEC = 180^\circ - 2 \times \bullet$ であり、これらの和は 180° なので、
3 点 P、E、C は一直線上にある。

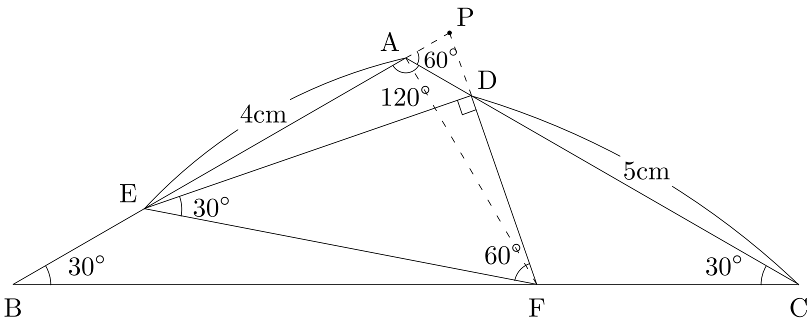
直線 CEP について、点 A と点 D は線対称の位置にあるので、$AP = DP$。
これより、$\triangle PBD$ は正三角形である。したがって、

$$\begin{aligned} 3 \times \bullet &= \angle PBD = 60^\circ \\ \bullet &= 60^\circ \div 3 = 20^\circ \end{aligned}$$

よって、$\angle BAC = 180^\circ - 4 \times \bullet = 180^\circ - 4 \times 20^\circ = 100^\circ$ となる。

答 <u>100°</u>

$\boxed{12}$



図のように BA と FD の交点を P とすると、$\angle BAC = 120^\circ$ より
$\angle PAD = 60^\circ$ である。
$\triangle PAD$ と $\triangle PFE$ について、$\angle P$ が共通、$\angle PAD = \angle PFE = 60^\circ$ より、
$\triangle PAD$ と $\triangle PFE$ は相似である。
よって、$PA : PD = PF : PE$ すなわち $PA : PF = PD : PE$ である。
$\triangle PAF$ と $\triangle PDE$ について、$\angle P$ が共通、$PA : PF = PD : PE$ より、
$\triangle PAF$ と $\triangle PDE$ は相似である。
よって、$\angle PAF = \angle PDE = 90^\circ$、
$\angle FAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle FBE \qquad \cdots ①$
$\angle AFB = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \angle DFE$ だから、

$$\begin{aligned}\angle DFA &= \angle DFE - \angle AFE \\ &= \angle AFB - \angle AFE \\ &= \angle EFB \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①, ② より、$\triangle AFD$ と $\triangle BFE$ について二角が等しいので、$\triangle AFD$ と
$\triangle BFE$ は相似となる。
よって、$AD : BE = DF : EF$。

ここで、$\triangle EFD$ は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形であるから、$DF : EF = 1 : 2$ である。

よって $AD : BE = 1 : 2$ であることから、$AD = ①, BE = ②$ とおける。

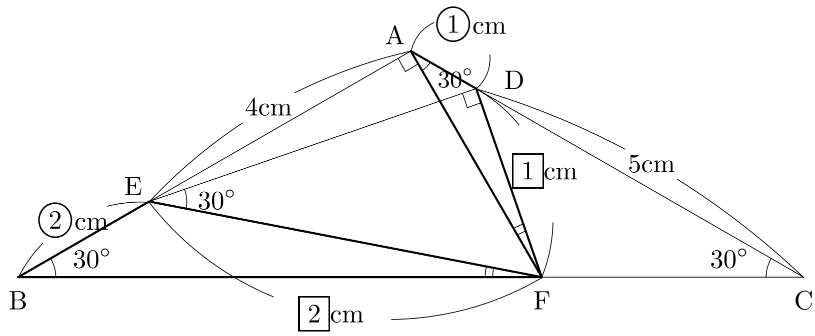
$AB = 4 + ②, AC = 5 + ①$ で、$AB = AC$ だから、

$$4 + ② = 5 + ①$$

両辺から $4 + ①$ を引いて、

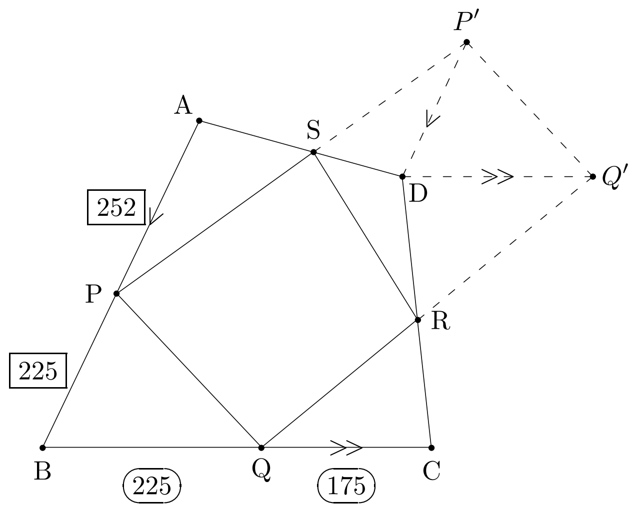
$$① = 1$$

よって $AD = ① = 1\text{cm}$。



答 <u>1cm</u>

$\boxed{13}$



$QR : Q'R = 25 : 28$、$PS : P'S = 9 : 7$ となるように点 Q', P' を上図のようにとる。このとき $\triangle CQR$ と $\triangle DQ'R$、$\triangle APS$ と $\triangle DP'S$ はそれぞれ相似となる (いわゆる"ちょうちょ型相似")。
したがって、$BQ = 225, BP = \boxed{225}$ とおくと、

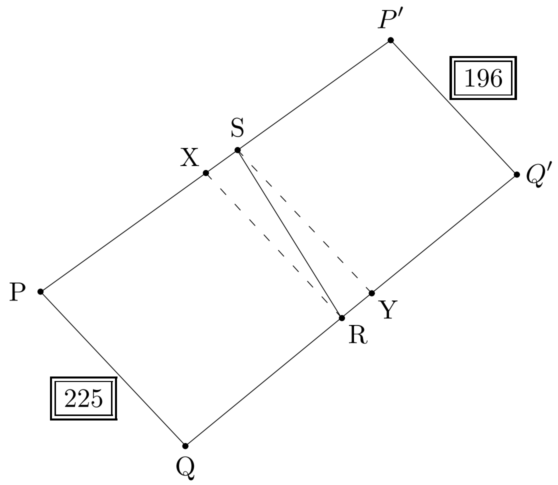
$$
\begin{aligned}
CQ &= 225 \times \frac{7}{9} = 175 \\
AP &= \boxed{225} \times \frac{28}{25} = \boxed{252} \\
DQ' &= 175 \times \frac{28}{25} = 196 \\
DP' &= \boxed{252} \times \frac{7}{9} = \boxed{196}
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
\angle PBQ &= 360^\circ - \angle A - \angle C - \angle SDR \\
&= 360^\circ - \angle P'DS - \angle SDR - \angle RDQ' = \angle P'DQ'
\end{aligned}
$$

なので、$\triangle PBQ$ と $\triangle P'DQ'$ は相似で、その相似比は $225 : 196$。

ここで、四角形 $PQQ'P'$ に注目する。



$\triangle PBQ$ と $\triangle P'DQ'$ は相似であり、また QB と $Q'D$ は平行なので、PQ と $P'Q'$ も平行。さらに、$\triangle PBQ$ と $\triangle P'DQ'$ の相似比より

$PQ : P'Q' = 225 : 196$。そこで $PQ = \boxed{225}, P'Q' = \boxed{196}$ とする。

直線 PQ や直線 $P'Q'$ に平行な直線を点 R, S から引き、それらの向かいの辺と交わる点をそれぞれ図のように X, Y とする。

このとき、$QR : Q'R = 25 : 28$ より

$$\begin{aligned} XR &= \boxed{225} \times \frac{28}{53} + \boxed{196} \times \frac{25}{53} \\ &= \boxed{\frac{11200}{53}} \end{aligned}$$

また、$PS : P'S = 9 : 7$ より

$$\begin{aligned} SY &= \boxed{225} \times \frac{7}{16} + \boxed{196} \times \frac{9}{16} \\ &= \boxed{\frac{3339}{16}} \end{aligned}$$

ここで、$\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$ より

$\angle SXR = \angle SPQ$(同位角) $= 180^\circ - \angle QRS = \angle YRS$、また

$\angle SRX = \angle YSR$(錯角) なので、$\triangle SXR$ と $\triangle YRS$ は相似。

したがって、この相似より、$XR : SR = SR : SY$ なので、

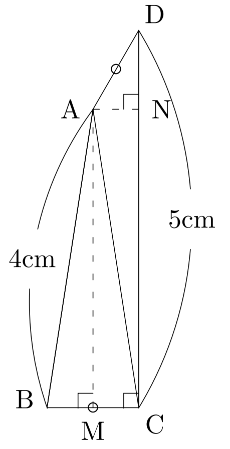
$$\begin{aligned} SR \times SR &= XR \times SY \\ &= \boxed{\frac{11200}{53}} \times \boxed{\frac{3339}{16}} \\ &= \boxed{210} \times \boxed{210} \end{aligned}$$

よって、$SR = \boxed{210}$ なので、$PQ : RS = 225 : 210 = 15 : 14$ である。

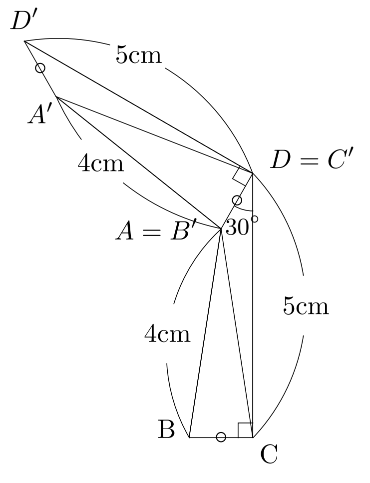
答 <u>15 : 14</u>

※　問題文に”$\triangle PSR$ と $\triangle PQR$ の面積比は 28 : 25 である”という条件がありましたが、これは実は問題を解くのには不要でした。(ただし、その他の条件から必然的に 28 : 25 になります。)

$\boxed{14}$

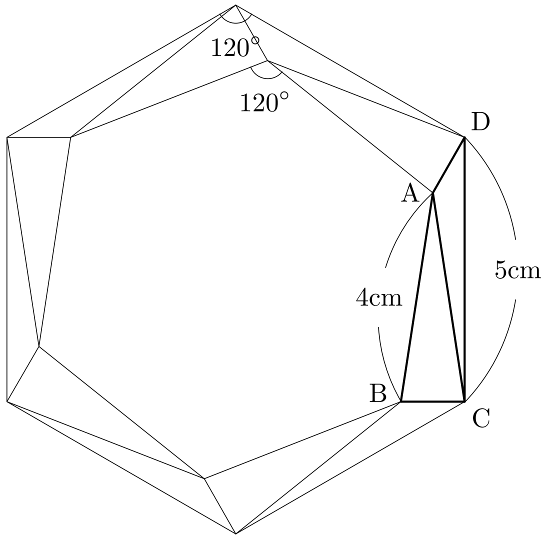


この図形を F と呼ぶことにする。
A から BC, CD におろした垂線の足を M, N とおくと、$\triangle ABC$ が二等辺三角形であることから、$MC : BC = 1 : 2$。
四角形 $AMCN$ は長方形だから、$AN = MC$。
また、$AD = BC$ より、$AN : AD = MC : BC = 1 : 2$ となる。
ここで、$\triangle DAN$ は直角三角形なので、これは $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形である。
今、F をもう一個用意し、F' とする。
F' の B, C(B', C' とする) が F の A, D に重なるように、F' を F の上につなげる。すると、次の図のようになる。



このとき、$\angle CDD' = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ となる。
また、$\angle CBA + \angle DAB = 360^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 240^\circ$ より、
$\angle BAA' = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$
よって、同様に F と同じ図形を B, C と A, D が重なるようにつなげていく

と、次の図のように、六個つなげたところで最初の F につながる。

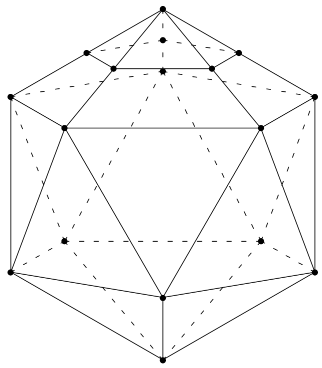


この F を六個つなげた図形は、一辺が 5cm の正六角形から一辺が 4cm の正六角形をくりぬいた形になっている。
一辺が 5cm の正六角形の面積は一辺が 5cm の正三角形の面積の 6 倍であり、一辺が 5cm の正三角形の面積は一辺が 1cm の正三角形の $5 \times 5 = 25$ 倍である。
一辺が 4cm の正六角形の面積は一辺が 4cm の正三角形の面積の 6 倍であり、一辺が 4cm の正三角形の面積は一辺が 1cm の正三角形の $4 \times 4 = 16$ 倍である。
よってこの F を六個つなげた図形の面積は、一辺が 1cm の正三角形の $5 \times 5 \times 6 - 4 \times 4 \times 6 = 54$ 倍であるから、F 一個の面積は、一辺が 1cm の正三角形の $54 \div 6 = 9$ 倍である。

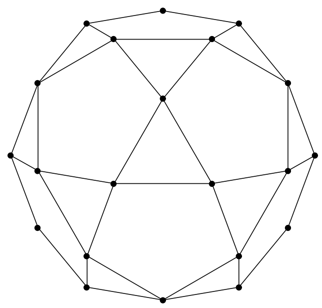
答 9 倍

$\boxed{15}$
立体アや立体イは、それぞれ正二十面体、正十二面体と密接に関連している。

まず、正二十面体を考える。
正二十面体の各頂点の周りを、下の図のように、各辺の中央の点を通過する平面で切断し、切り落としていく。

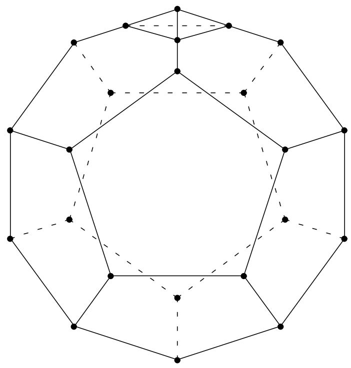


このとき、各頂点から切り出される立体は、立体アである[1]。
正二十面体の 12 頂点全ての周りを切り落とすと、下のような立体が残る。

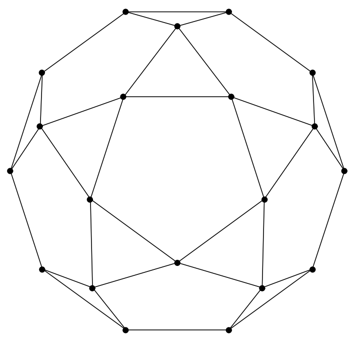


この立体を立体ウと呼ぶことにする。ちなみに、この立体は、準正多面体と呼ばれる立体のうちの 1 つである。
次に、正十二面体を考え、さっきと同様に、各頂点の周りを、下図のように各辺の中央の点を通る平面で切断し、切り落としていく。

[1]正確には「立体アの相似形である」。以後同様。



このとき、各頂点から切り出される立体は、立体イであることに注意。
さらに、正十二面体の 20 頂点全ての周りを切り落とすと、下のような立体が残る。

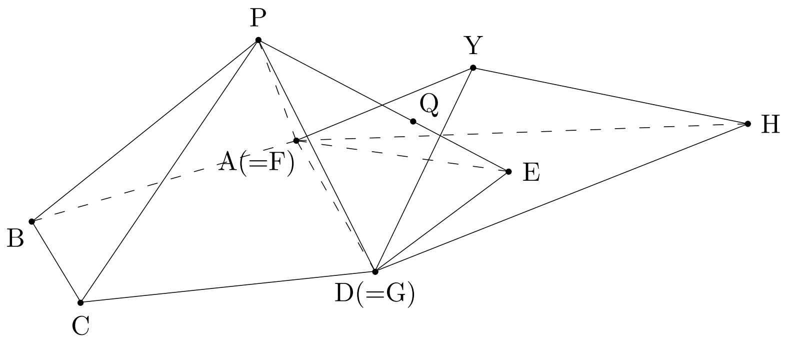


よく見ると、この立体は、さっきの立体ウである。
さらに、この立体ウ自身の対称性より、辺を共有して隣り合う 2 つの面 (正三角形の面と正五角形の面) がなす角度は、どこも等しい。その等しい角度を A とおくと、

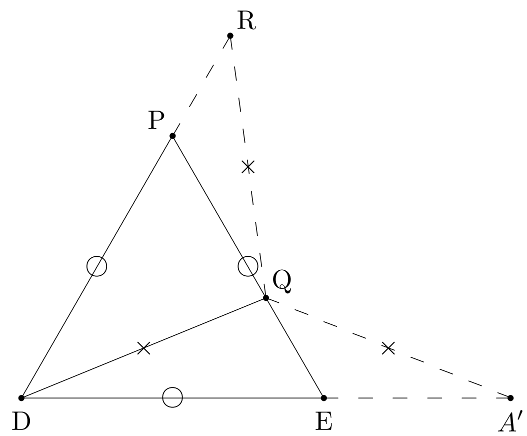
$$\begin{aligned}(\text{立体アの底面と側面がなす角度}) &= 180^\circ - A \\ (\text{立体イの底面と側面がなす角度}) &= 180^\circ - A\end{aligned}$$

したがって、立体アの底面と側面のなす角度 (すなわち側面の勾配) は、立体イの底面と側面のなす角度 (側面の勾配) と等しい。後で、このことを使う。

さて、問題の立体アと立体イが重なり合った状況を図示すると、



上のようになっている。ただし、立体イの頂上の点を Y としている。
ここで、この 2 つの立体の共通部分の立体である、四面体 Q-ADE に注目。
さっき見たように、立体アの側面と立体イの側面の勾配が等しいので、四面体 Q-ADE の側面である $\triangle QAD$ と $\triangle QED$ の勾配が等しい。したがって、直線 AD と直線 ED は、「直線 QD を通り、地面に垂直な平面」について対称の位置にある。したがって、$\angle QDA = \angle QDE$ である。
ここでようやく、正三角形 PED に注目する。



点 A' を、$DQ = A'Q$ となるように、辺 DE の延長上にとる。
このとき、$\angle QDA = \angle QDA'$ であり、また、$\triangle QDA$ と $\triangle QDA'$ は両方とも二等辺三角形なので、$\triangle QDA$ と $\triangle QDA'$ は合同。したがって、

$$
\begin{aligned}
EA' &= DA' - DE \\
&= (\text{アの底面の正五角形の対角線の長さ}) - (\text{アの底面の正五角形の 1 辺の長さ}) \\
&= AC - AB = 1.5\text{cm}
\end{aligned}
$$

ここで点 R を、$DQ = RQ$ となるように、辺 DP の延長上にとると、

- $\angle RPQ = \angle QEA' = 120^\circ$
- $\angle PRQ = \angle PDQ = 60^\circ - \angle EDQ = 60^\circ - \angle EA'Q = \angle EQA'$
- $RQ = QA'$

なので、$\triangle PRQ$ と $\triangle EQA'$ は合同。よって、$PQ = EA' = 1.5\mathrm{cm}$ である。

答 <u>1.5cm</u>