$\boxed{1}$

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \mathrm{D} \\ - & \mathrm{C} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{G} & \mathrm{F} \end{array}$$

ここで、HED から CCD を引いたものが BGF になるので、CCD と BGF を足せば HED になるので次のように式変形できる。

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{C} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ + & \mathrm{B} & \mathrm{G} & \mathrm{F} \\ \hline & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \mathrm{D} \end{array}$$

また、 $\begin{array}{rcccc} & \mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ + & & \mathrm{E} & \mathrm{E} & \mathrm{D} \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{D} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}$

は、筆算において同じ位の数を入れ替えても式は成立するので、次のように書ける。

$$\begin{array}{rcccc} & \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ + & & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \mathrm{D} \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{D} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}$$

ここで、この式の HED に代入してすると、

$\begin{array}{rcccc} & \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ & & \mathrm{C} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ + & & \mathrm{B} & \mathrm{G} & \mathrm{F} \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{D} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}$ とかける。さらに、この式の同じ位の数を入れ替える操作を何回かすると次の式を得る。

$$\begin{array}{rcccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ & & \mathrm{E} & \mathrm{B} & \mathrm{F} \\ + & & \mathrm{C} & \mathrm{G} & \mathrm{D} \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{D} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}$$

さらに、この式と最初に与えられた式 $\begin{array}{rcccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ + & & \mathrm{E} & \mathrm{B} & \mathrm{F} \\ \hline & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{G} & \mathrm{D} \end{array}$ を比べて、

$$\begin{array}{ccccc} & A & C & G & D \\ + & & C & G & D \\ \hline & B & D & C & C \end{array} \cdots (1)$$

を得る。

この式の D に 0 〜 9 までをあてはめて調べていく。D=0 のとき、C=0 となり、全ての数が異なるという条件に反するので不適。
D=1 のとき、C=2 となり、百の位の D は 4 か 5 になるが D=1 なので不適。
D=2 のとき、C=4 となり、百の位の D は 8 か 9 になるが D=2 なので不適。
D=4 のとき、C=8 となり、百の位の D は 6 か 7 になるが D=4 なので不適。
D=5 のとき、C=0 となり、百の位の D は 0 か 1 になるが D=5 なので不適。
D=6 のとき、C=2 となり、百の位の D は 4 か 5 になるが D=6 なので不適。
D=7 のとき、C=4 となり、百の位の D は 8 か 9 になるが D=7 なので不適。
D=8 のとき、C=6 となり、百の位の D は 2 か 3 になるが D=8 なので不適。
D=9 のとき、C=8 となり、百の位の D は 6 か 7 になるが D=9 なので不適。
以上より、D=3 のとき条件に適する。D=3 なので C=6 となる。
さらに、G+G の一の位は 6 になるが、$G \neq 3$ なので G=8 となる。
また、ABCD+EBF=ACGD より F=0 となる。
さらに、HED-CCD=BGF の C,D,F に値を代入すると E=4, がわかる。
ここで、わかっている値を整理すると

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F			D	E		C		G	

ここで、式 (1) より、A+1=B なのでありえるのは、A=1,B=2 である。

つまり、

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F	A	B	D	E		C		G	

となる。
これらの値を HED-CCD=BGF に代入すると H=9 が得られる。
以上より GHA=891 となる。

答 891

$\boxed{2}$
A は 2007 桁の数であるから、A は $\underbrace{99\cdots99}_{2007}$ 以下の数であり、B は $\underbrace{9999\cdots9999}_{\underbrace{99\cdots99}_{2007}}$
(9 を「9 を 2007 個並べた数」個並べた数）以下である。
B の各桁の和を X、X の各桁の和を Y とすると、X は

$$9 \times \underbrace{99\cdots99}_{2007} = 8\underbrace{99\cdots99}_{2006}1$$

以下である。このことから Y は

$$7 + 9 \times 2007 = 18070$$

以下である。（この値は例えば $X=7\underbrace{99\cdots99}_{2007}$ の時に取り、Y が 18071 以上の値をとるためには X は少なくとも $X=8\underbrace{99\cdots99}_{2007}$ 以上でないといけない。）
Y の各桁の和は 36 なので

$$Y=9999$$

である。（各桁の和が 36 になる 2 番目に小さい数は 18999）
更にここから X として考えられる最大の値は

$$8\underbrace{99\cdots99}_{1110}1\underbrace{00\cdots00}_{896}(=9\times\underbrace{99\cdots99}_{1111}\underbrace{00\cdots00}_{896})$$

であり、X がこの値の時 B の最大値は

$$\underbrace{9999\cdots\cdots\cdots9999}_{\underbrace{99\cdots99}_{1111}\underbrace{00\cdots00}_{896}}\underbrace{0000\cdots0000}_{\underbrace{99\cdots99}_{896}}$$

である。もし B の値をこれより大きくすると B の桁数はこれより大きくなることはないのでなので X の値がより大きくなってしまう。つまりこの値が C である。
よって

$$C-2007=\underbrace{9999\cdots\cdots\cdots999998}_{\underbrace{99\cdots99}_{1111}\underbrace{00\cdots00}_{896}}\underbrace{9999\cdots9999997993}_{\underbrace{99\cdots99}_{896}}$$

この各桁の和を X'、X' の各桁の和を Y' とすれば、

$$X'=9\times(\underbrace{99\cdots99}_{2007}-3)+8+7+3=8\underbrace{99\cdots99}_{2005}82$$

$$Y'=8+9\times2005+8+2=18063$$

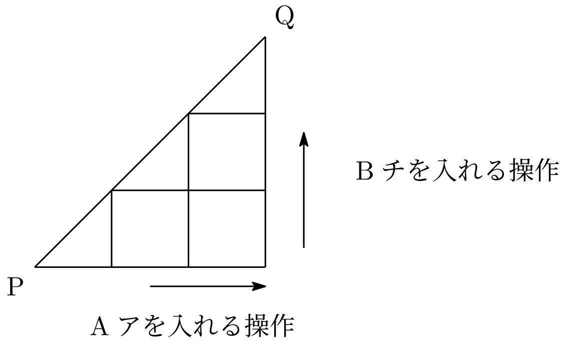
となる。

答 <u>18063</u>

$\boxed{3}$
A に入ってるアメの個数を A ア、B に入ってるアメの個数を B ア、A に入ってるチョコレートの数を A チ、B に入ってるチョコレートの数を B チとする。ここで、最終状態の記法を定義する。上記の定義に従って、$\begin{pmatrix}A\,ア & B\,ア\\ A\,チ & B\,チ\end{pmatrix}$ と、書くことにする。A にはいっているお菓子の個数は 5 個で、すべてのアメの個数も 5 個なので、A ア+A チ=5、A ア+B ア=5 とかける。前者から後者を引いて、A チ=B アが得られるので、お菓子の最終状態は以下の 6 つしかないことが分かる。$\begin{pmatrix}0&5\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\5&0\end{pmatrix}$.

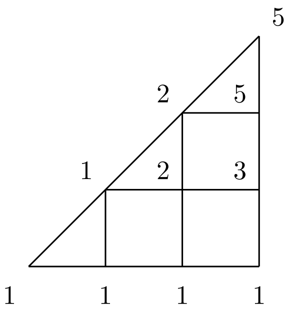
ここで、$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合を例にとって考えてみよう。まず、単純に１０個のお菓子を決められた通りに入れる場合の数は $\dfrac{10!}{3!2!3!2!}$ となる。これに条件通りにお菓子を入れていく確率をかければこの場合の場合の数が出る。さて、ここで条件通りにお菓子を入れる方法を考えてみよう。

これは、実は



にあてはめて考えるとうまく考えることができる。これらで点 P から点 Q までのすべての”道”（ナナメは通れない）はお菓子を入れる条件を満たしながら動くようになっていることが確認できる。

この場合だと、



のように数を入れていくと求める A ア、B チの入れ方の場合の数が 5 であることがわかる。ここで、A ア、B チを入れていく場合の数の総数は $\dfrac{6!}{3!3!}$ なのでこの場合の求める場合の数は $\dfrac{10!}{3!2!3!2!} \times \dfrac{5}{\frac{6!}{3!3!}} = 6300$ であることがわかる。ほかのもこれと同様にしてそれぞれの場合の数が求まる。$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ の場合は、入れる条件を考えなくてもよいので $\dfrac{10!}{5!5!} = 252$ であることがわかる。$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は、$\dfrac{10!}{4!4!} \times \dfrac{1}{\frac{2!}{1!1!}} = 3150$ であることがわかる。$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の

場合は、$\dfrac{10!}{3!2!3!2!} \times \dfrac{2}{\frac{4!}{2!2!}} = 8400$ であることがわかる。$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合は、先ほど考えたとおり 6300 である。$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の場合は、$\dfrac{10!}{4!4!} \times \dfrac{14}{\frac{8!}{4!4!}} = 1260$ であることがわかる。$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ の場合は、$\dfrac{10!}{5!5!} \times \dfrac{42}{\frac{10!}{5!5!}} = 42$ であることがわかる。
以上の場合より求める場合の数は、252+3150+8400+6300+1260+42=19404 通りとなる。

答 19404

$\boxed{5}$

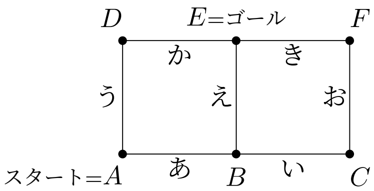
1 から 555555 まで全ての整数を表すのは不可能であることを示す。
1 から 555555 まで全ての整数を表せたとすると、66666、77777、88888、99999、100000、111111、222222、333333、444444、555555 を表せるが、そのためには少なくとも 1 から 5 は 6 面、6 から 9、0 は 5 面、つまり合計 $(5\times6+5\times5=)55$ 面必要だが 9 個の立方体には $(6\times9=)54$ 面しかないので実際には表せない。

　1 から 555554 まで全ての整数を表せることを示す。
例えば、9 個の立方体に次のように数字を書き込んでみる。
$\{1,2,4,5,7,9\}$
$\{1,2,4,5,7,9\}$
$\{1,2,4,6,7,9\}$
$\{1,3,4,6,8,9\}$
$\{1,3,4,6,8,0\}$
$\{1,3,4,6,8,0\}$
$\{2,3,5,6,8,0\}$
$\{2,3,5,7,8,0\}$
$\{2,3,5,7,9,0\}$
例えば、1 以上 555554 以下のある数を表したい時に 0、9、8、7、6、5、4、3、2、1 の順に立方体を無作為に選んで並べていけば、その数は多くて 6 桁で 4 から 1 まではそれぞれ 6 面（別の立方体上に）存在しているので、いつでも必ず並べられる。また、その他の面も 5 面ずつ存在しているので、5 個目の立方体を並べる時までは必ず並べらるれる。
6 個目に 0、9 から 5、を並べようとする（この時は必ず 5 を並べようとしている）時のみに並べられない可能性がある。
6 個目が並べられない時、既に並べられた 5 個の立方体全て（のどこかの面）に 6 個目に並べたい数が書かれていることになる。だがこの時、表したい数は 5 以上の 6 桁のぞろ目ではないので 6 個目に並べたい数とは異なる数（具体的には 0 が必ず存在する）の面が手前を向いている立方体が存在する。その立方体をその数（6 個目に並べたい数とは異なる数）がかれた別の立方体

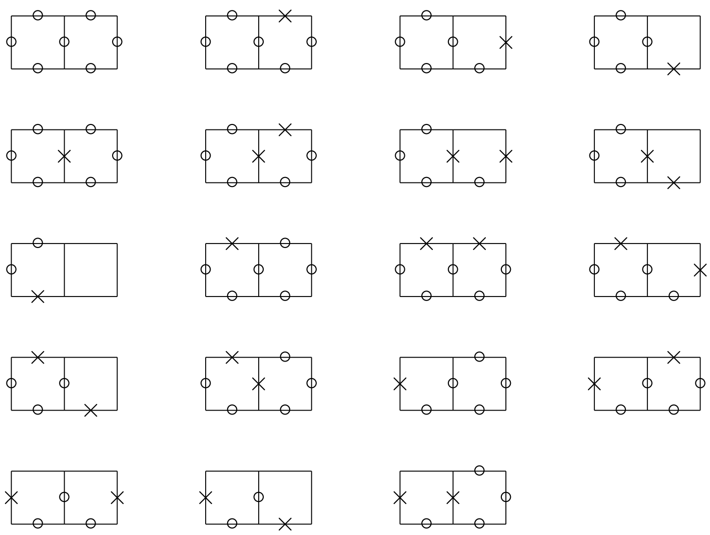
と取替えることができ、もともと並べていた立方体を 6 個目として並べてやれば、その数を表すことに成功する。
因みに「その立方体をその数（6 個目に並べたい数と異なる数）がかれた別の立方体と取替えることができ」なかったなら、「6 個目に並べたい数が書かれている 5 個の立方体の組」と「6 個目に並べたい数と異なる数が書かれている 5 個の立方体の組」が一致することになるが、上のように数を書いているのでそのような状況は起こりえない。

答 <u>555554</u>

$\boxed{7}$



上図のように各点と辺に名前をつける。
参考として、以下に、スタートからゴールまで行くことのできる迷路の形状を書き出す (必要な図ではない)。すなわちこれらのどの形状に対して行ってもロボットがゴールまでいけるような指令のうち、もっとも命令の個数が少ないものを求めるのが問題である。
通れる道に「○」、通れない道に「×」をつけ、通れても通れなくても結果に影響しない道には何もつけずに表記することにする。(つまり、何もついていない道は他の道が通れないことによって、通れる道であっても実際に通ることの無い道である)



(1) まず、最初ロボットがスタート地点 $(= A)$ にいるとき、ゴールまで行く経路としては ①{ う , か } と ②{ あ , い , え , お , き } の二つがある。

このうち、① のみが通れる迷路もあれば ② のみが通れる迷路もあるので、この両方の道に対して、ゴールまで行けるような動き方を考えなければならない。① と ② の両方を試す必要があるが、一方の経路から一方の経路に移るには必ず A まで戻らなければならないので少なくとも、「① を試す $\rightarrow$ A まで戻る $\rightarrow$ ② を試す」または「② を試す $\rightarrow$ A まで戻る $\rightarrow$ ① を試す」という操作が必要である。

ここで、「① を試す $\rightarrow$ A まで戻る $\rightarrow$ ② を試す」の方を採用することを考える。なぜなら、① の方が ② よりも道が少なく、「A まで戻る」時にかかる命令の個数が少なく済むと予想されるからである。(「① を試す」、「② を試す」はいずれにも含まれるので差は無いと考えられる)

(2) 次に、「① を試す $\rightarrow$ A まで戻る」を行った後、ロボットが A にいるときを考える。これから、② を試す。

上に行くと ① に戻ることになり意味が無い (明らかに命令の個数が多くかかるので考えないということ)。また左や上には進めないので右に進むとしてよい。

この時点で B にいる。ゴールまで行く経路としては、③{ あ , う , か } と ④{ え } と ⑤{ い , お , き } の三つがある。

③ を通る必要は無く (この時点までにすべて調べていると仮定してよいから) を選ぶことは意味が無い。よって (1) のときと同様に考えて、「④ を試す $\rightarrow$ B まで戻る $\rightarrow$ ⑤ を試す」または「⑤ を試す $\rightarrow$ B まで戻る $\rightarrow$ ④ を試す」という操作がをするが、また同様の考え方により、④ を試す $\rightarrow$ B まで戻る $\rightarrow$ ⑤ を試す」の方を採用することを考える。

以上を踏まえて、命令の個数が少ない、ゴールまで必ず行ける指令の候補を考える。

(i) まず、「↑、→」が「1 を試す」に相当する。

(ii) 「↓、←」で「A まで戻る」ことになる。
(i) が終わった時点でロボットは B, D, ゴールのうちいずれかにいるのでこれによって A に戻ることができる。(「ゴールを少なくとも一度通る」ことが条件であるから、ロボットがゴールに到達した場合の後のことは考えなくて良い)

(iii) 「→」で B に行く。
「1 を試す」ことでゴールに到達しなかった場合を考えているから、「あ」は通れる道と仮定してよい。

(iv) 「↑」で「4 を試す」ことになる。

(v) この時点でロボットは B, ゴールのうちいずれかにいるから何もしなくても B まで戻ったことになる。

(vi) 「→、↑、←」で「4 を試す」ことになる。
(v) の時点でゴールに一度も到達していないなら 5 は通れなければならないから、これによって必ずゴールに到達する。

まとめると、「↑、→、↓、←、→、↑、→、↑、←」となり、この指令には命令が 9 個ある。念のため、この指令によってどんな (必ずスタートからゴールまで行ける) 迷路であってもロボットが一度はゴールに到達していることを確かめることが、2 ページ前の図を使うことでできる。

条件を満たす、なるべく少ない命令による指令が見つかったので、後は条件を満たす指令で命令個数が 8 個以下であるものが存在しないことを示せばよい (この指令が最小個数の命令を持つというこれまでの予想は直感的に正しそうであるから、これを答えとしてよいが、厳密には証明が必要である[1])。

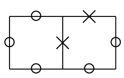
(a) 最初に右に進める (② を試す) とする。

- ② を調べつくしてから ① を調べる場合
  まず、「→」である。

  B にいるとき、「↑」が ④ を試して B に戻る最少個数の指令で、

  「→、↑、←、↓、←」が ⑤ を試して B に戻る最少個数の指令である。

  よって、② を試して A に戻るには「→、↑、→、↑、←、↓、←、←」あるいは「→、→、↑、←、↓、←、↑、←」が最少個数の指令である。ここまでで命令は 8 個必要。
  例えば

  の形のときこの時点でまだゴールにたどり着いていないのでさらに「↑、→」が必要である。結局命令は 10 個必要となるので、(必ずゴールまでたどり着くことはできるが) これは最少個数の指令ではない。

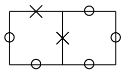
- ② を調べつくさずに ① を調べ、再び ② を調べる場合
  まず、最初に A に戻るまでに 2 個しか命令を使わない場合、それは「→、←」で、明らかに命令が多くかかるので考えない。

  よって最初に A に戻るまでに 3 個以上命令を使うとしてよい。

  A に戻って ① を調べるが、「↑、↓」は考えなくて良いから 3 個以上命令を使うとしてよい。

  ② は調べ尽くされていないから A に戻って再び ② を調べなければならない。全体として 8 個以下の命令しか使わないと仮定するとさらに使える命令は 2 個以下である。さらに使える命令が 1 個以下だとすると ② の残りを調べつくすことはできない。さらに使える命令が 2 個だとすると、これまでの命令は「→、↑、←、↑、→、↓」に確定し、さらに使う命令は「→、↑」に確定するが、「→、↑、←、↑、→、↓、→、↑」では例えば

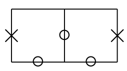
[1]ただし、ここに書く証明もさほど厳密ではありません



のような形のときゴールにたどり着けないので 8 個以下の命令では条件を満たさない。

(b) 最初に上に進める (①を試す) とする。

「↑、↓」では意味が無いので「↑、→、↓」とする。この時点で A にいる場合があり、全体として 8 個以下の命令で条件を満たすとするとそのときも残り 5 個以下の命令でゴールにたどり着かなければならないから、残りの命令は「→、↑、→、↑、←」に確定する (なぜかは省略するがこのことは簡単に確認できる) が、「↑、→、↓、→、↑、→、↑、←」では例えば

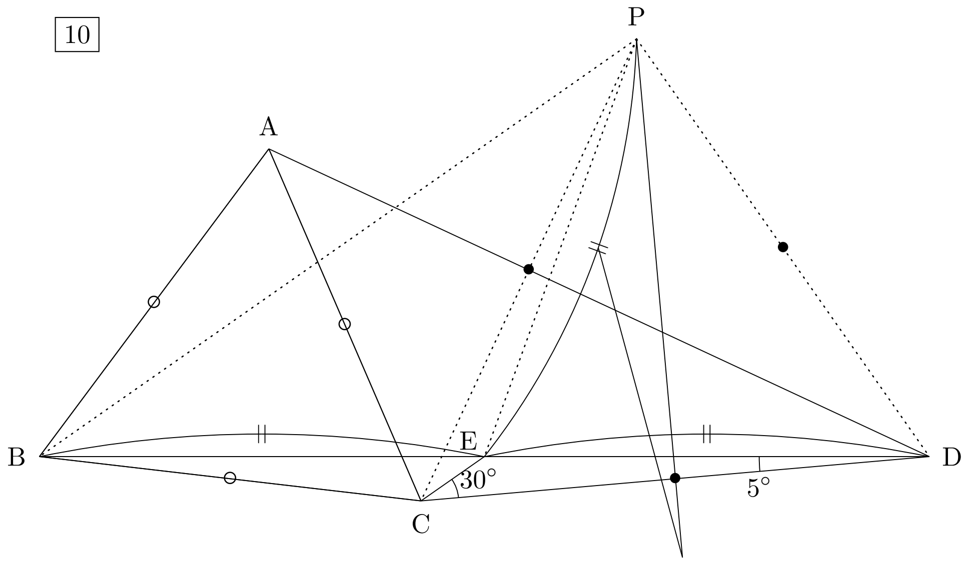


のような形のときゴールにたどり着けないので 8 個以下の命令では条件を満たさない。

以上より、8 個以下の命令からなるどんな指令も条件を満たさないことが分かるが、一方 9 個の命令からなる条件を満たす指令の存在はすでに分かっているので、結局 9 個が最少である。

答 9 個

$\boxed{10}$



$\triangle DCE$ を CE に関して対称となるように描く。D の移る点を P と置く。

このとき、$\triangle DCE$ と $\triangle PCE$ は合同だから $CD = CP$、また $\triangle ABC$ が正三角形であることから $CA = CB$、さらに $\angle ACD = \angle ACP + 60^\circ = \angle BCP$ となって、一つの角とそれを挟む二辺が等しくなるので、$\triangle CDA$ と $\triangle CPB$ は合同。すなわち、$\angle ADC = \angle BPC$

$\angle ADB$ を求めるには $\angle ADC$ が求まればよいから、$\angle BPC$ を求めればよい。

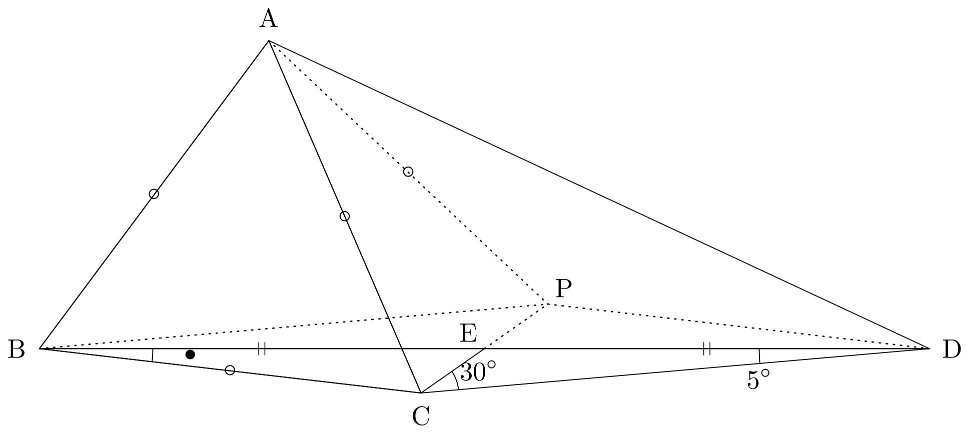
$\triangle DCE$ と $\triangle PCE$ は合同だから、$EP = ED$。さらに、$BE = ED$ であったから、$\angle EPB = \angle EBP, \angle EPD = \angle EDP$ となり、$\angle BPD = \angle BPE + \angle DPE = \angle PED \div 2 + \angle PEB \div 2 = (\angle PED + \angle PEB) \div 2 = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$ となる。

$\angle PCD = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$ で、$CD = CP$ だから、$\angle CPD = (180^\circ - \angle PCD) \div 2 = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$　($\triangle CDP$ は正三角形)。

以上より、$\angle BPC = \angle BPD - \angle CPD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$。まとめると、$\angle ADB = \angle ADC - 5^\circ = \angle BPC - 5^\circ = 30^\circ - 5^\circ = 25^\circ$

答 $\underline{25^\circ}$

＜別解＞



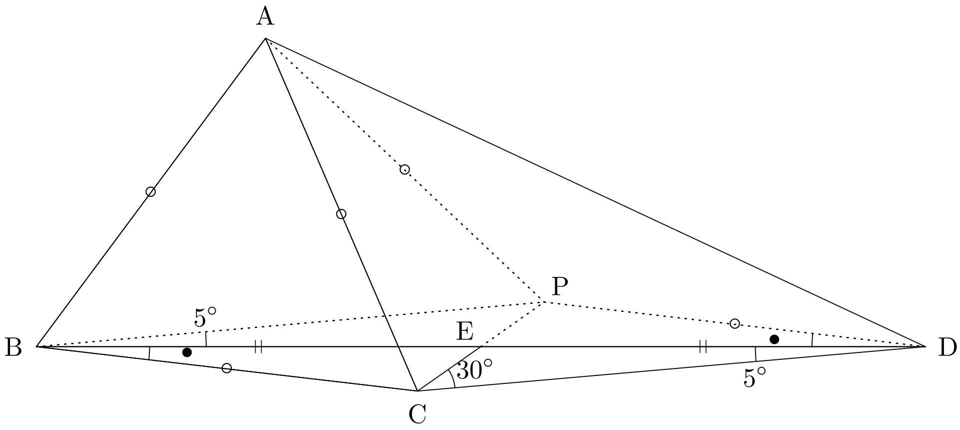
$\angle EBC = \bullet$ と置く。

CE の延長上に、$AP = AB (= BC = CA)$ となるような点 P をとる。このとき $\angle CPB = \angle CPA - \angle BPA = (180^\circ - \angle CAP) \div 2 - (180^\circ - \angle BAP) = (\angle BAP - \angle CAP) \div 2 = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$ である。

ここで、$\triangle EPB$ と $\triangle ECD$ は合同である。なぜならば、$EB = ED, \angle EPB = \angle ECD (= 30^\circ), \angle PED = \angle CED (= 145^\circ)$ となり、一つの辺の長さと二つの内角が等しくなるからである。よって $EP = EC$ となる。

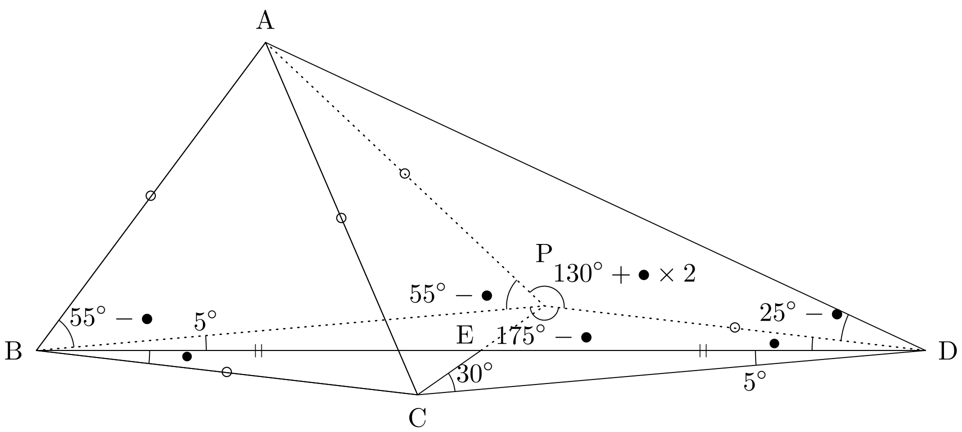
さらに $\angle PED = \angle CEB (= 35^\circ), ED = EB$ となり、一つの内角とそれを挟む二辺の長さが等しくなるから $\triangle EPD$ と $\triangle ECB$ は合同となる。（つまり $\varDelta$ $PBCD$ は平行四辺形である）

以上より、$PD = BC = AP$ となるから $\triangle PAD$ は二等辺三角形となる。



となる。二等辺三角形の性質などを用いて順にそれぞれの角度を●を用いてあらわしていくと

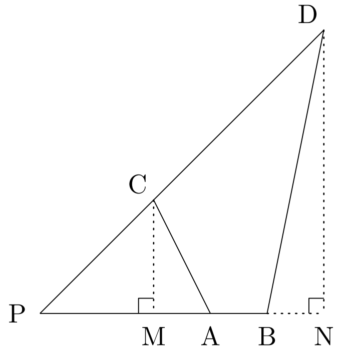
$$\begin{aligned}\angle ABP &= 60^\circ - 5^\circ - \bullet = 55^\circ - \bullet\\ \angle APB &= \angle ABP = 55^\circ - \bullet\\ \angle BPD &= 180^\circ - 5^\circ - \bullet = 175 - \bullet\\ \angle APD &= 360^\circ - \angle APB - \angle BPD\\ &= 360^\circ - (55^\circ - \bullet) - (175^\circ - \bullet) = 130^\circ + \bullet \times 2\\ \angle PDA &= (180^\circ - \angle APD) \div 2 = (180^\circ - 130^\circ - \bullet \times 2) \div 2 = 25^\circ - \bullet\\ \angle ADB &= \angle PDA + \angle PDB = 25^\circ - \bullet + \bullet = 25^\circ\end{aligned}$$



答 25 度

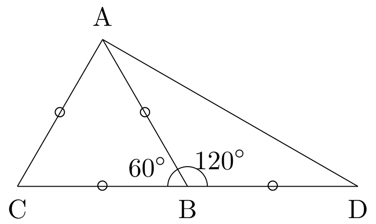
$\boxed{11}$

まず、同じ角を持つ三角形の面積比は、その角を挟む二辺の積の比で表される。



$\triangle PAC : \triangle PBD = PA \times CM : PB \times DN = PA \times PC : PB \times PD$($\triangle PCM$ と $\triangle PDN$ は相似だから) だからである。

また、下の図で、明らかに $\triangle ABC = \triangle ABD$ である。

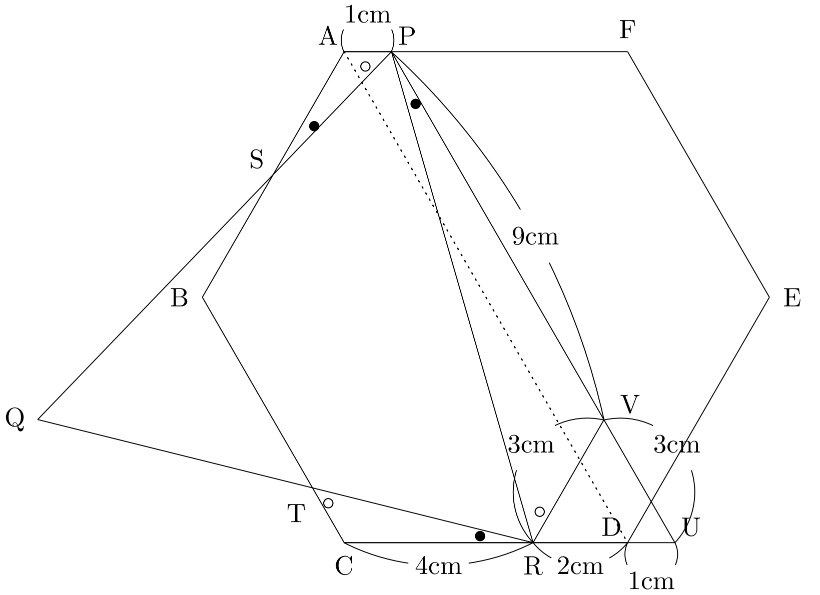


以上より、一つの角が 120° でその角を挟む二辺の長さが Acm, Bcm である三角形の面積は、一辺 1cm の正三角形の面積の $A \times B$ 倍である。以下これを用いる。なお、一辺 1cm の正三角形の面積を X と置いておく。

問題で、$\triangle ABC = 6 \times 6 \times X = 36 \times X$、$⏢ACRP = \dfrac{1+4}{6+6} \times ⏢ACDF = \dfrac{5}{12} \times 6 \times 6 \times X \times 4 = 60 \times X$(高さの等しい台形の面積は上底と下底の長さの和に比例する) だから、五角形 $ABCRP$ の面積は $36 \times X + 60 \times X = 96 \times X$ である。

AB と PQ の交点を S、BC と RQ の交点を T と置くと、斜線部の面積は五角形 $ABCRP$ の面積から $\triangle APS, \triangle CRT$ の面積を引いたものになっている。よって $\triangle APS, \triangle CRT$ の面積が分かればよい。

$\angle PAS = 120^\circ$ で、$AP = 1$cm が分かっているから、AS の長さが分かれば $\angle APS$ の面積を X を用いて表すことができる。同様に、CT の長さが分かれば CRT の面積を X を用いて表すことができる。これらを求めることを考える。



CD の延長上に $DU = 1\text{cm}$ となる点 U をとる。このとき $\triangle ADUP$ は平行四辺形になる。よって $AD \parallel PU$ となるから $\angle PUC = \angle ADC = 60^\circ$ となる。また、$PU = AD = 12\text{cm}$ となる。

さらに、$UV = 3\text{cm}$ となる点 V を線分 PU 上にとる。すると、$PV = 12 - 3 = 9\text{cm}$ となり、また $\angle RUV = 60^\circ, UR = UV = 3\text{cm}$ より $\triangle URV$ は正三角形となるから、$RV = RU = 3\text{cm}$ となる。

さて、$\triangle APS, \triangle CTR, \triangle VRP$ は互いに相似である。このことを示す。

$\angle PAS = \angle TCR = \angle RVP = 120^\circ$、また、

$$
\begin{aligned}
\angle PSA &= 60^\circ - \angle APS \\
\angle TRC &= \angle PRC - 60^\circ \\
&= \angle RPF - 60^\circ \\
&= 180^\circ - \angle APS - 60^\circ - 60^\circ \\
&= 60^\circ - \angle APS \\
\angle RPV &= 120^\circ - \angle APS - 60^\circ \\
&= 60^\circ - \angle APS
\end{aligned}
$$

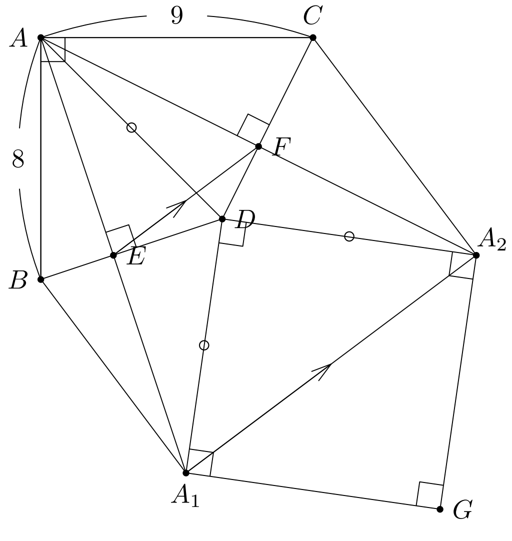
より、互いに二角が等しくなるので確かに $\triangle APS, \triangle CTR, \triangle VRP$ は互いに相似である。

このことから $CR:CT=VP:VR$ が分かるから、$CT=4\times\frac{3}{9}=\frac{4}{3}$cm が分かり、また同様に $AS:AP=VP:VR$ より、$AS=1\times\frac{9}{3}=3$cm が分かる。

よって $\triangle APS=1\times 3\times X=3\times X, \triangle CRT=4\times\frac{4}{3}\times X=\frac{16}{3}\times X$ となる。最初に五角形 $ABCRP$ の面積が $96\times X$ であることを導いたので、結局斜線部の面積は $96\times X-3\times X-\frac{16}{3}\times X=\frac{263}{3}\times X$ となる。すなわち一辺が 1cm の正三角形の面積の $\frac{263}{3}$ 倍である。

答 $\underline{\frac{266}{3}(88\frac{2}{3})\text{ 倍}}$

$\boxed{12}$



BD について A と対称な点を A_1、CD について A と対称な点を A_2 とする。このとき、

$$\begin{aligned}\angle A_1DA_2 &= 360^\circ - \angle ADB - \angle A_1DB - \angle ADC - \angle A_2DC \\ &= 360^\circ - 2\times\angle ADB - 2\times\angle ADC \\ &= 360^\circ - 2\times(\angle ADB + \angle ADC) \\ &= 360^\circ - 2\times 135^\circ = 90^\circ\end{aligned}$$

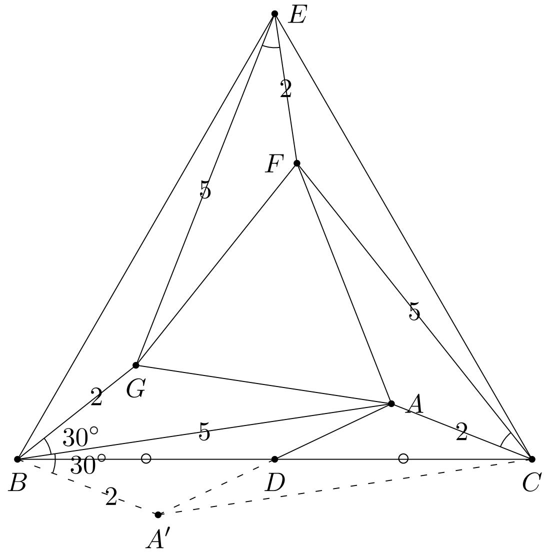
であり、また $A_1D = AD = A_2D$ なので、$\triangle A_1DA_2$ は直角二等辺三角形。また、$EF = A_1A_2 \div 2$ なので、A_1A_2 の長さが求まればよい。

ここで、$\angle BAD = \angle DAC (= 45^\circ)$、$\angle ABD = 180^\circ - 45^\circ - \angle ADB = 135^\circ - \angle ADB = \angle ADC$ であるので、$\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ は相似 (二角相当)。したがって $AB : AD = AD : AC$ より、$AD\times AD = AB\times AC = 8\times 9 = 72$ である。

そこで、四角形 DA_1GA_2 が正方形となるように点 G をとると、この正方形の面積は $A_1D\times A_1D = AD\times AD = 72$ であるが、この面積は $A_1A_2\times A_1A_2\div 2$ とも表せ、その値が 72 なので、$A_1A_2 = 12$。よって $EF = 12\div 2 = 6$。

答 6cm

$\boxed{13}$



辺 BC を 1 辺とする正三角形 BCE を、図のようにとる。そして、その内側に、$\triangle ABC$ と合同な三角形を対称的に 3 つとる $(\triangle FCE, \triangle GEB)$。このとき対称性より、内側の三角形 AFG も正三角形である。

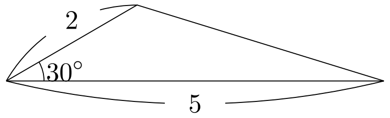
ここで、D に関して A と対称な点を点 A' とすると、四角形 $BA'CA$ は平行四辺形なので $\angle ABA' = 180° - 150° = 30°$ であり、また $BA' = 2$ である。

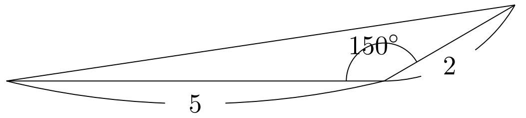
さらにこのとき、$\angle ABG = \angle CBE - (\angle ABC + \angle GBE) = 60° - (\angle ABC + \angle ACB) = 60° - (180° - 150°) = 30°$ 、そして $BG = 2$ が成立するため、点 G と点 A' は辺 AB に関して対称。よって、$AG = AA'$ であり、これと $AA' = 2 \times AD$ であることより $AG = 2 \times AD$ である。

こうして、$BC = 2 \times BD$、$AG = 2 \times AD$ であることが分かった。これより

$$
\begin{aligned}
& (BD \text{ を 1 辺とする正三角形の面積}) - (AD \text{ を 1 辺とする正三角形の面積}) \\
= \ & \frac{1}{4} \times (BC \text{ を 1 辺とする正三角形の面積}) - \frac{1}{4} \times (AD \text{ を 1 辺とする正三角形の面積}) \\
= \ & \frac{1}{4} \times (\triangle BCE - \triangle AFG)
\end{aligned}
$$

となるが、$\triangle BCE - \triangle AFG$ の部分は、下図の三角形 (2 種類) が 3 つずつ合わさって出来ており、そして下図の三角形の面積はどちらも 2.5 であるため (注参照)、$\triangle BCE - \triangle AFG = 2.5 \times 6 = 15$ である。したがって、求める値は、それを 4 で割った $\dfrac{15}{4}$ である。



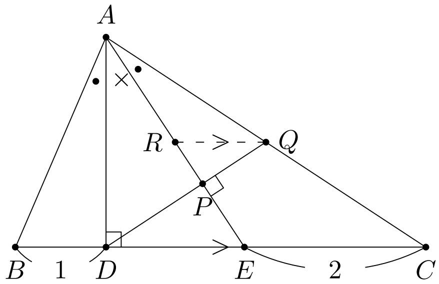


答 $\frac{15}{4}$ (3.75)cm^2

注

3 つの角が $30°, 60°, 90°$ の直角三角形は、その斜辺と底辺 (短い方) の長さの比が 2:1 である (2 つ合わせると正三角形となることより)。今、上の 2 つの三角形に「高さ」の線を入れると、どちらの図にもこの直角三角形が出現し、高さが $2 \div 2 = 1$ であることが分かる。したがって、面積は、$5 \times 1 \div 2 = 2.5$。

$\boxed{14}$



点 D から直線 AE と垂直な線を引き、AE、AC との交点をそれぞれ P、Q とする。このとき、三角形 ABE は三角形 AQD と裏返しの相似形であり、さらにこの相似で、線分 AD と線分 AP が対応している。したがって、線分 BD は線分 QP に対応しているので、

$$\begin{aligned} PQ &= BD \times (\triangle AQD \text{ の } \triangle ABE \text{ に対する相似比}) \\ &= BD \times \frac{AP}{AD} \\ &= \frac{AP}{AD} \end{aligned}$$

であるが、ここで点 Q から BC に平行に引いた直線と AE との交点を、図のように R とすると、2 つの直角三角形 $\triangle ADP$ と $\triangle QRP$ は相似であるため、

$$\frac{AP}{AD} = \frac{QP}{QR}$$

したがって、結局 $PQ = \dfrac{QP}{QR}$ となるので、$QR = 1$ である。

すると、$\triangle ARQ$ と $\triangle AEC$ が 1:2 の相似形となり (いわゆる”ピラミッド型相似”)、これより $AQ = CQ$ である。したがって、点 Q は直角三角形 ADC の斜辺の中央の点なので、$AQ = DQ = CQ$ であることが分かる。

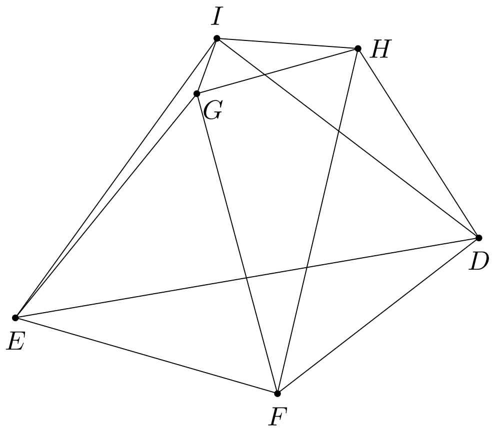
その結果、$\angle C = \angle EDP = 90^\circ - \angle ADP = \angle DAP = \times$ であり、直角三角形 ADC の内角の和に注目することで $\times + \times + \cdot = 90^\circ$ であることが分かる。一方、$\angle BAC$ に注目することで $\cdot + \times + \cdot = 80^\circ$ が分かるので、あとは $\times$ と $\cdot$ の消去算をおこなうと、$\cdot = \dfrac{70^\circ}{3}$ と求まる。

答 $\dfrac{70}{3}$ 度

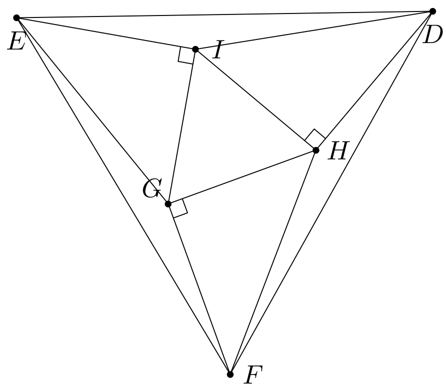
$\boxed{15}$

※ 2 ページ目までヒントを掲載します。解答 · 解説は 3 ページ目からです。

ヒント 1.



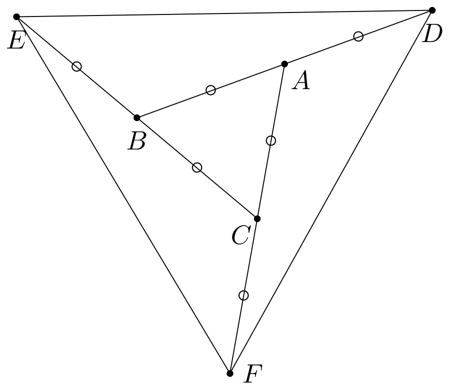
まず、この立体を組み立てると、上のような立体になる (ただし、頂点の記号は問題の図中の記号とは無関係。以後同様)。上面と底面はどちらも正三角形であり、またこの 2 面は平行である。



そして、この立体を真上から見下ろしたときの図が上の図である。

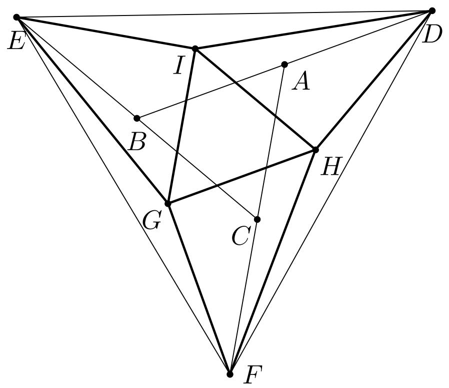
3 か所の直角に注意。これらは、展開図中の 3 か所の直角に対応している。ここで、問題文より、底面の正三角形 DEF の面積は、上面の正三角形 GHI の面積の 7 倍であることに注意。7:1 から何が見えるだろうか $\cdots$。

ヒント 2. (ヒント 1 からの続き)



上の図のように、底面の正三角形 DEF を分割し、内部に正三角形 ABC をとると、$\triangle DEF : \triangle ABC = 7 : 1$ である ($7 - 2 \times 3 = 1$ であるため)。つまり、正三角形 ABC と正三角形 GHI が合同となり、何か良さそうである $\cdots$。

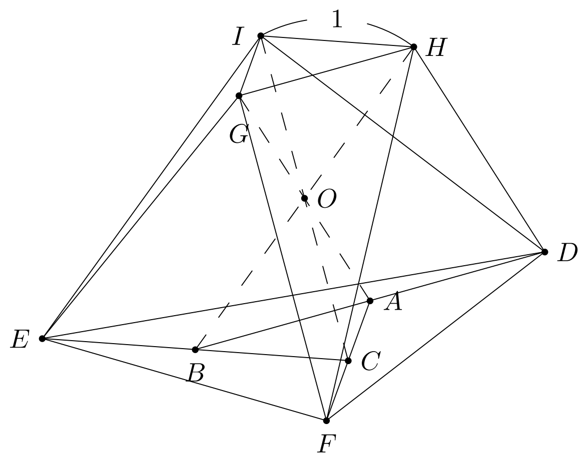
そこで、この図に、上面の正三角形 GHI を重ね合わせてみると、下の図のようになる。



(太線は、底面以外の部分の辺を表している)
図から見て取れるように、中央の 2 つの正三角形が、点対称な星型をなしているようだ $\cdots$。今、1 辺 1cm の正四面体の体積の何倍であるかを問われている、ということにも注意。ヒントはここまでである。じっくり飽きるまで考えてみて欲しい。

解答 · 解説 (ヒントとは独立して読めます)

この立体は、下の図のような構造になっている。(実線が立体の辺を表し、点線は補助線を表す。)



($各頂点の記号は、展開図中の図とは別である。展開図の正三角形 ABC、DGJ が、上の図の正三角形 DEF、GHI にそれぞれ対応している。また、点 A, B, C は、面 DEF 上に便宜上とった点であり、点 A, B, C はそれぞれ辺 BD, CE, AF の真ん中の点となっている。さらに、四面体 O-ABC,O-GHI は、ともに 1 辺 1cm の正四面体である。)

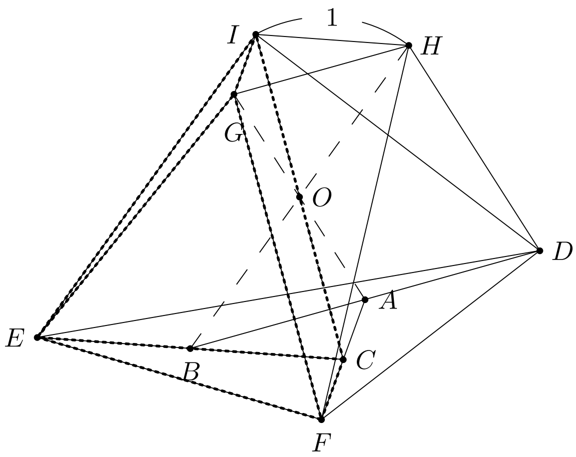
実際、上の立体は、展開図中の条件 (「」内の部分) を全て満たしている。まず、「底面の正三角形 DEF の面積は、上面の正三角形 GHI の面積の 7 倍」であることが確かめられる (三角形 DEF の面積は三角形 ABC の面積の $1+2\times 3=7$(倍) であり、また三角形 ABC と GHI の面積は等しいため)。そして、

$$\begin{aligned}(1)\ \angle ABF &= \angle ABC+\angle CBF = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ\\ (2)\ \angle ABG &= 90^\circ\ (\text{四角形 } GBAH \text{ は長方形であるため})\end{aligned}$$

より直線 BA は面 GBF に対して垂直であるために、BA と平行である直線 GH も、面 GBF に対して垂直。したがって 「$\angle HGF = 90^\circ$」である。[2]さらに、四角形 $IGFC$ は平行四辺形であるため、「$GF(=IA)=2$」である。

こうして、この立体の構造が分かったが、この立体の体積は、1 辺 1cm の正四面体の体積の果たして何倍なのだろうか。

[2]もう一度触れておくが、ここでの説明中の各頂点の記号は、全て解答の最初に掲載した見取り図における記号である (展開図中の記号ではない)。



この立体は、上の図の太線部分の立体 (これは四角すい E-$IGFC$)3 つと、1 辺 1cm の正四面体 2 つによって構成されている。具体的には、

- 四角すい E-$IGFC$ (これが太線部分)
- 四角すい F-$GHDA$
- 四角すい D-$HIEB$
- 1 辺 1cm の正四面体 O-ABC
- 1 辺 1cm の正四面体 O-GHI

によって構成されている。

太線部分の四角すい E-$IGFC$ の体積が、1 辺 1cm の正四面体である B-OAC の体積の何倍であるかを調べる。

まず、E-$IGFC$ の底面である平行四辺形 $IGFC$ の面積は、B-OAC の底面である正三角形 OAC の面積の 4 倍である。そして、E-$IGFC$ と B-OAC の高さの比は、$EC : BC$ で表され、その比は 2:1 であるので、高さは 2 倍。すなわち、四角すい E-$IGFC$ の体積は、1 辺 1cm の正四面体である B-OAC の体積の $4 \times 2 = 8$(倍) である。

さきに挙げた 5 つの立体のパーツのうち、最初の 3 つの四角すいは合同である。したがって、立体全体の体積は、1 辺 1cm の正四面体の体積の

$$8 \times 3 + 2 = 26 \text{ (倍)}$$

である。

答 26 倍